

# 广义局部坐标样条\*

孙家昶

(中国科学院计算中心)

## GENERALIZED SPLINES IN LOCAL COORDINATES

Sun Jia-chang

(Computing Center, Academia Sinica)

**Abstract.** A spline in local coordinates which is more general than that in [1] is considered. The spline curve in such a case is independent of the reference local coordinate system. Hence the splines in both local coordinate in [1] and ordinary one are joined together in a more general sense.

我们在[1]中提出了适用于“大挠度”曲线插值的方法,这种方法在实际运用时仍有某些不便之处。例如,[1]只考虑了通过节点的插值,不能直接用作曲线拟合;一律采用各自的局部坐标,对有些形状相近的曲线族的特点没能很好地利用;有些曲线的“大挠度”只占极小部份,并不需要每次转坐标;有的离散数据间断性质较强,用[1]得到的节点关系式中非线性项是主要项,这时简单迭代往往发散,要用牛顿迭代,但会增加运算量。为了克服以上这些缺陷,并且考虑到局部坐标样条与一般样条在程序上的通用性,在本文中考虑一种更广的局部坐标样条,即把[1]中的局部坐标样条与一般样条统一起来描述。

设  $\{A_j\}(j=0, 1, \dots, N)$  是一组需插值或拟合的有序型值点列,我们适当选取另一组有序点列  $\{P_k\}(k=0, 1, \dots, N)$ ,依次以  $P_{i-1}$  为原点、相邻点连线  $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$  为横坐标正向构成一系列局部坐标系  $(\xi_j, \eta_j)(j=1, 2, \dots, N)$ 。下面把这组由  $\{P_j\}$  确定的局部坐标系简记为  $(P)$ 。

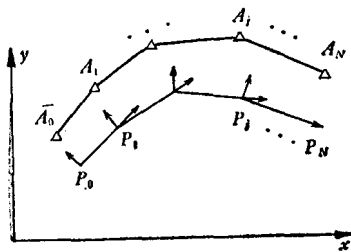


图 1

现在我们以三次样条为例考虑  $(P)$  中的局部样条。曲线  $\Gamma$  称为  $(P)$  中的广义局部三次样条,是指它在每个局部坐标中曲线弧段是相应横坐标的三次多项式且整条曲线及其切线和曲率在区域内连续。因此,

并不需要象[1]所要求的  $\{P_j\}$  与  $\{A_j\}$  二组点列重合,而考虑更广的一类局部坐标样条:局部坐标系  $(P)$  可以与型值点列  $\{A_j\}$  相互独立,这样就能把[1]中考虑的局部坐标样条与通常意义下的样条函数在更广的范围里统一起来。事实上,这二者只是分别表示了  $\{P_j\}$  的二种特殊选取:  $P_j \equiv A_j$  或  $P_j$  是  $A_j$  在某个固定横坐标中的投影。

假定  $\{A_j(x_j, y_j)\}$  与  $\{P_j(x_{0j}, y_{0j})\}(j=0, 1, \dots, N)$  在某个固定坐标系中,那末点  $A_j$  在  $(P)$  中相邻二坐标系的表示分别是

\* 1978年10月9日收到。

与

$$\begin{pmatrix} \xi_i(-) \\ \eta_i(-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi_{i-1} & \sin \phi_{i-1} \\ -\sin \phi_{i-1} & \cos \phi_{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i - x_{0,i-1} \\ y_i - y_{0,i-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi_i(+) \\ \eta_i(+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi_i & \sin \phi_i \\ -\sin \phi_i & \cos \phi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i - x_{0,i} \\ y_i - y_{0,i} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中  $\phi_{i-1} = \arctg \frac{y_{0,i} - y_{0,i-1}}{x_{0,i} - x_{0,i-1}}$  为折线  $\overline{P_{i-1}P_i}$  在固定坐标系中的水平夹角。

记  $HK_i = x_{0,i} - x_{0,i-1}$ ,  $DK_i = y_{0,i} - y_{0,i-1}$ ,  $\varphi_i$  为相邻二直线  $\overline{P_{i-1}P_i}$  与  $\overline{P_iP_{i+1}}$  在  $P_i$  处的转角, 于是

$$\sin \varphi_i = \frac{DK_i \cdot HK_{i+1} - DK_{i+1} \cdot HK_i}{LK_i \cdot LK_{i+1}}, \quad (2)$$

其中  $LK_i = |\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{HK_i^2 + DK_i^2}$ . (3)

设  $m_{i-1}(+)$ ,  $m_i(-)$  与  $M_{i-1}(+)$ ,  $M_i(-)$  分别表示  $A_{i-1}$  和  $A_i$  在第  $i$  个局部坐标中的单侧一阶与二阶导数, 于是当曲线段  $\widehat{A_{i-1}A_i}$  为第  $i$  个局部坐标中的三次多项式时, 其公式  $\eta_i = \eta_i(\xi_i)$  与一般三次式类似:

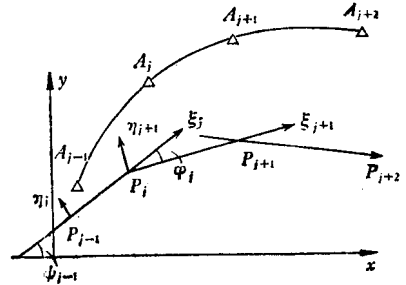


图 2

$$\eta_i(\xi_i) = [1, \Delta\xi_i, (\Delta\xi_i)^2, (\Delta\xi_i)^3] \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

这里记号  $\Delta\xi_i \equiv \xi_i - \xi_{i-1}(+)$ .

矢量

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = A(h_i) \begin{bmatrix} \eta_{i-1}(+) \\ m_{i-1}(+) \\ \eta_i(-) \\ m_i(-) \end{bmatrix} = B(h_i) \begin{bmatrix} \eta_{i-1}(+) \\ M_{i-1}(+) \\ \eta_i(-) \\ M_i(-) \end{bmatrix},$$

$$A(h) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/h^2 & -2/h & 3/h^2 & -1/h \\ 2/h^3 & 1/h^2 & -2/h^3 & 1/h^2 \end{bmatrix}, \quad B(h) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/h & -h/3 & 1/h & -h/6 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/6h & 0 & 1/6h \end{bmatrix}, \quad (5)$$

其中

$$h_i = \xi_i(-) - \xi_{i-1}(+).$$

这时二阶导数与一阶导数互有如下的转换公式:

$$\begin{aligned} M_i(+) &= -\frac{2}{h_{i+1}} \left[ m_{i-1}(+) + 2m_i(-) - 3 \cdot \frac{\eta_{i+1}(-) - \eta_i(+)}{h_{i+1}} \right], \\ M_i(-) &= \frac{2}{h_i} \left[ m_{i-1}(+) + 2m_i(-) - 3 \cdot \frac{\eta_i(-) - \eta_{i-1}(+)}{h_i} \right], \\ m_{i-1}(+) &= -\frac{h_i}{6} \left[ 2M_{i-1}(+) + M_i(-) - 6 \cdot \frac{\eta_i(-) - \eta_{i-1}(+)}{h_i^2} \right], \\ m_i(-) &= -\frac{h_i}{6} \left[ M_{i-1}(+) + 2M_i(-) - 6 \cdot \frac{\eta_i(-) - \eta_{i-1}(+)}{h_i^2} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

运用上述转换公式与内节点  $A_j$  处切线连续方程

$$\frac{m_j(+)-m_j(-)}{1+m_j(+)\cdot m_j(-)} = \operatorname{tg} \varphi_j, \quad (7)$$

代入曲率连续方程

$$\frac{M_j(-)}{[1+m_j^2(-)]^{3/2}} = \frac{M_j(+)}{[1+m_j^2(+)]^{3/2}}, \quad (8)$$

用与 [1] 类似的方法化简整理, 即可得到相应的一些内节点关系式。例如, 令

$$m_j \equiv \begin{cases} m_j(+) & j < N, \\ m_N(-) & j = N, \end{cases}$$

相应的“ $m$ -关系式”为

$$\lambda_j m_{j-1} + 2m_j + \mu_j m_{j+1} = c_j^* + F_j^* \quad (9)$$

$$(j = 1, 2, \dots, N-1),$$

$$\text{其中 } c_j^* = 2\lambda_j \operatorname{tg} \varphi_j + \mu_j \operatorname{tg} \varphi_{j+1} + 3 \left[ \lambda_j \frac{\eta_j(-) - \eta_{j-1}(+)}{h_j} + \mu_j \frac{\eta_{j+1}(-) - \eta_j(+)}{h_{j+1}} \right],$$

$$F_j^* = \mu_j \operatorname{tg} \varphi_{j+1} \cdot m_{j+1} \cdot \tilde{m}_{j+1} + 2\lambda_j \operatorname{tg} \varphi_j \cdot m_j \cdot \tilde{m}_j [\cos \varphi_j + m_j \sin \varphi_j]^3$$

$$+ \lambda_j \left[ 2m_j + m_{j-1} - 2\operatorname{tg} \varphi_j - 3 \cdot \frac{\eta_j(-) - \eta_{j-1}(+)}{h_j} \right]$$

$$\times \{1 - [\cos \varphi_j + m_j \sin \varphi_j]^3\},$$

这里

$$\lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}, \quad \mu_j = 1 - \lambda_j, \quad \tilde{m}_j = \begin{cases} m_0(+) & j = 0, \\ m_j(-) & j \geq 1. \end{cases}$$

与 [1] 类似, 同样也可得到内节点处的其它类型的关系式 (“ $\tilde{m}$  关系式”, “ $M$  关系式”, “ $\tilde{M}$  关系式”与 “ $\rho$  关系式”等)。

当所处理的曲线满足周期条件时, 只需令节点关系式对  $j = N$  亦成立, 这时公式中出现的所有量均按周期处理, 例如

$$\varphi_N = \varphi_0, \quad \eta_N(+) = \eta_0(+), \quad m_N(+) = m_0(+), \quad M_N(+) = M_0(+).$$

对于非周期曲线, 令  $\varphi_N = 0$ 。特别当二端切线、曲率或局部二阶导数已知时, 有关端点的系数由下表给出:

$P_0$ 处	$\mu_0$	$C_0^*$	$F_0^*$
<i> $m_0 = \eta_0'$	0	$2\eta_0'$	0
<ii> 曲率 $\rho_0$ 已知	1	$\operatorname{tg} \varphi_1 - \frac{h_1 \rho_0}{2} + 3 \cdot \frac{\eta_1(-) - \eta_0(+)}{h_1}$	$\operatorname{tg} \varphi_1 \cdot m_1 \cdot \tilde{m}_1 + \frac{\rho_0 h_1}{2} \{1 - [1 + m_1^2]^{3/2}\}$
<iii> $M_0 = \eta_0''$	1	$\operatorname{tg} \varphi_1 - \frac{h_1 \eta_0''}{2} + 3 \cdot \frac{\eta_1(-) - \eta_0(+)}{h_1}$	$\operatorname{tg} \varphi_1 \cdot m_1 \cdot \tilde{m}_1$

内节点关系式加上适当的边界条件形成完整的非线性方程组

$$Am = C^* + F^*(m). \quad (10)$$

与 [1] 类似, 当局部坐标之间夹角  $\varphi = \max |\varphi_j|$  适当小时, 方程组 (11) 可用如下的

$P_N$ 处	$\lambda_N$	$C_N^*$	$F_N^*$
<i> $m_N = \eta_N'$	0	$2\eta_N'$	0
<ii> 曲率 $\rho_N$ 已知	1	$\frac{h_N \rho_N}{2} + 3 \cdot \frac{\eta_N(-) - \eta_{N-1}(+)}{h_N}$	$\frac{h_N \rho_N}{2} \{ [1 + m_N^2]^{3/2} - 1 \}$
<iii> $M_N = \eta_N''$	1	$\frac{h_N \eta_N''}{2} + 3 \cdot \frac{\eta_N(-) - \eta_{N-1}(+)}{h_N}$	0

简单迭代求解:

$$\begin{cases} Am^{(0)} = C^*, \\ Am^{(k)} = C^* + F(m^{(k-1)}) \quad (k = 1, 2, \dots). \end{cases} \quad (11)$$

解出  $m$  后代入 (4) 即得分段三次的具体表达式。

上面的叙述是以局部三次样条为背景的。只要适当修改上述公式的某些系数, 同样可得与 (9) 类似的局部二次样条的“ $m$ -关系式”:

$$\lambda_i m_{j-1} + 3m_j + \mu_i m_{j+1} = \tilde{C}_i^* + \tilde{F}_i^*(m), \quad (12)$$

这里的  $\tilde{C}_i^*$ ,  $\tilde{F}_i^*$  分别由 (9) 中相应的  $C_i^*$ ,  $F_i^*$  中系数“2”改为“3”、“3”改为“4”而得到。非周期端点条件的系数也需作相应的修改。这时得到的分段局部二次多项式总有  $2N$  个, 它们在插值点  $A_i$  处切线相等、曲率相等且在相邻直线  $\overline{P_{i-1}P_i}$  的中垂线上相交并相切。

[1] 中有关局部三次与二次插值样条逼近阶的定理对于这里的广义局部样条插值同样适用。

我们曾在 655 机上进行过广义三次局部样条的数值试验, 计算实践表明, 选取好局部坐标系 ( $P$ ), 直接影响型值点  $\{A_i\}$  的处理效果。对于“小挠度”型值, 不妨直接采用一般坐标样条, 即  $\{P_i\}$  取为  $\{A_i\}$  在水平轴上的投影; 对于整体大挠度而局部是小挠度的型值, 可采用 [1] 所述的局部坐标:  $P_i \equiv A_i$ , 也可采用形状与  $\{A_i\}$  所组成的多边形相似的局部坐标系, 后者对处理一些形状接近的曲线族 (如一系列机身框) 有好处; 对于有明显间断 (即所谓“局部大挠度”) 的型值, 局部坐标的选取既要考虑到型值的形状, 又不能使所选局部坐标系间转角过大, 因为非线性方程迭代公式 (11) 的收敛速度主要取决于此转角的大小。

本文叙述的广义局部坐标样条方法不仅能用于插值, 而且能用于曲线拟合。不过, 这时方程组 (10) 要作相应的改动, 迭代方法还是类似的。

### 参 考 文 献

- [1] 孙家昶, 局部坐标下的样条函数与圆弧样条曲线, 数学学报, 20: 1 (1977), 28—40.  
 [2] 孙家昶, 局部坐标下样条函数的算法, 电子计算机动态 (中国科学院计算所内部资料), 1975 年第 8 期, 86—98.