

克拉梅尔与二十世纪的概率统计学

范明

概率论的主要研究对象是随机现象或不确定性及其数量规律，其起源可追溯到欧洲文艺复兴时期，几百年来概率论已经从最初研究赌博中的问题发展成为现代数学的主流分支之一。在其蓬勃发展的 20 世纪二、三十年代，瑞典著名数学家哈拉尔德·克拉梅尔 (Harald Cramér, 1893-1985) 在概率论、数理统计、保险精算数学等领域均作出了卓越贡献，被誉为现代概率统计学的开拓者和奠基人之一。从 1912 至 1982 年，克拉梅尔的学术生涯长达 70 年，多个猜想、定理和不等式均以他的名字命名，他一生中撰写了四本英文专著，还撰写了 110 篇英、法、德等文字及 38 篇瑞典文的学术论文和报告。笔者参考了克拉梅尔本人的回忆录《半个世纪的概率论》¹ 以及他的学生和后继者的多篇回忆文章写成此文，以飨读者。



克拉梅尔于 1893 年 9 月 25 日在瑞典首都斯德哥尔摩出生，一生中大部分时间都在那里度过。他在第一次世界大战开始前的 1912 年进入斯德哥尔摩大

¹ H. Cramér, Half a century with probability theory: some personal recollections, The Annals of Probability, Vol 4 (1976).

学（当时称为高专），同时学习数学和生物化学。在学习期间，克拉梅尔担任著名化学家欧拉 - 切尔平的研究助理，1913-1914 年间他与切尔平在生物化学领域联名发表了他一生中最早的五篇论文。这位切尔平也是一位了不得的人物，他是数学大神欧拉（Leonhard Euler）的第六代嫡孙，他本人获得了 1929 年诺贝尔化学奖，他的儿子乌尔夫·冯·欧拉（Ulf von Euler）获得了 1970 年诺贝尔医学奖。如果克拉梅尔继续跟随切尔平学习和研究生物化学，前途也是无可限量的。但是后来克拉梅尔发现数学才是自己真正的兴趣所在，当时“瑞典数学之父”米塔 - 列夫勒（Gösta Mittag-Leffler）带领斯德哥尔摩大学一群年轻有为的数学家在数学研究领域非常活跃，在其影响下克拉梅尔成为马塞尔·里斯（Marcel Riesz）的一名博士生。马塞尔·里斯是一位年轻有才华的匈牙利数学家，1908 年应米塔 - 列夫勒之邀来到斯德哥尔摩工作，他在位势理论、解析数论、偏微分方程、泛函分析和克利福德代数等领域都做出了重要贡献，他的哥哥弗里杰什·里斯（Frigyes Riesz）是泛函分析学科的创立者之一。克拉梅尔在里斯的指导下受到了严格的数学训练，并开始学习刚刚建立不久的勒贝格测度和积分理论。克拉梅尔在博士阶段的研究领域是解析数论，从而熟悉了傅里叶积分的技巧。这些训练为他后来从事概率论的研究工作奠定了坚实的分析学基础。

1917 年克拉梅尔以题为《一类狄利克雷级数》（*On a class of Dirichlet series*）的论文通过了论文答辩并获得斯德哥尔摩大学的数学博士学位。次年 25 岁的克拉梅尔迎娶了他“Beloved Marta”，两人育有二子一女，携手度过了长达 55 年同甘共苦、幸福美满的家庭生活。



克拉梅尔毕业后于 1919 年被斯德哥尔摩大学聘为助理教授，当年秋天著名英国数学家哈代访问斯德哥尔摩大学，这次访问对于克拉梅尔关于解析数论的研究意义重大。第二年夏天，克拉梅尔前往英国剑桥大学，在哈代指导下工作了一段时间。几年当中克拉梅尔在解析数论领域发表了大约 20 篇论文，并在 1922 年的斯堪的纳维亚数学家大会上演讲。克拉梅尔的一篇重要论文是关于丢番图方程素数解的研究结果，该问题是著名的哥德巴赫猜想和孪生素数猜

想的推广。在剑桥工作期间克拉梅尔还结识了比他年轻一岁并已初露锋芒的美国数学家维纳 (Norbert Wiener)，三年之后维纳发表了题为《微分空间》的著名论文，在函数空间中引入了一个概率测度，从而建立了布朗运动的严密理论，这一随机过程即为后来以他本人名字命名的维纳过程。维纳的这一工作比柯尔莫哥洛夫的划时代基础研究还要早几年。顺便提一下，1964年维纳访问斯德哥尔摩，在皇家理工学院 KTH 演讲时突发心脏病后卒于异乡。

克拉梅尔在担任助理教授的同时，还在瑞典一家著名的保险公司兼职精算师工作，后来还担任一个拥有 25 名员工的部门主管，数学教授在保险公司兼职及雇佣年轻的数学家是瑞典保险业的传统。这一工作使得克拉梅尔接触了一些概率问题并开始进行有关保险风险方面数学问题的研究，而当时正处在这些问题的早期阶段，严格的数学基础和理论尚未成型。一个保险公司在一个时期内所承担的个别风险如果被视作彼此独立的，则其总和就与概率论中的“中心极限定理”产生密切联系，这一术语是波利亚 (George Pólya) 在他 1920 年的论文中首次提出的。波利亚是马塞尔·里斯的匈牙利好友，经常访问瑞典，因此克拉梅尔有机会与他交流合作。另一方面，风险事业也可看作一个随时间变化并在每一瞬间随机波动的经济系统。1903 年，数学风险理论的奠基人之一隆德伯格 (Filip Lundberg) 在乌普萨拉大学完成了博士论文，研究了一类当所有待付的索赔总数中每笔都相同时形成的过程，这类系统可以说是最早的连续时间随机过程的模型之一。1919 年克拉梅尔用瑞典文写出了他的第一篇概率论论文，是隆德伯格过程的特例——泊松过程的一个简短注记。

1812 年法国大数学家拉普拉斯在系统总结前人工作的基础上写出了专著《概率论的解析理论》，其中给出了概率统计的许多基本概念和结果，并引入了有力的分析工具，但仍然属于古典概率论的范畴。在之后的一个多世纪里概率论得到了长足发展，产生了许多经典漂亮的数学结果，出现了一些关于极限定理和随机过程的先驱研究。特别是 19 世纪中后期俄罗斯学派的代表人物切比雪夫、马尔可夫和李雅普诺夫等提出了随机变量、分布函数、密度函数等概念，并用分析方法建立了大数定律及中心极限定理的一般形式。但一方面俄罗斯学派的结果在国外鲜为人知，另一方面还没有一个理论上的公理化体系，因此直到 1920 年之前概率论仍被排除在主流数学之外。就连一些著名数学家都束手无策，比如庞加莱就曾叹道：“人们难以给出概率的一个满意定义。”

1920 年代概率论历史上发生了两件大事：一件是法国数学家莱维 (Paul Lévy) 的专著《概率计算》于 1925 年问世，该书第一次尝试用严格的数学方法对概率论进行系统描述。另一件是以年轻的苏联数学家欣钦 (Aleksandr Khinchin) 和柯尔莫哥洛夫为代表的“新俄罗斯学派”的兴起，在他们特别是后者的一系列论文中，证明了如“0-1 律”、独立随机变量和的不等式及重对数律等重要结果，这些结果为柯尔莫哥洛夫日后提出概率论的一般理论作出了充分准备。对于克拉梅尔来说，1920 至 1929 年也是积蓄能量、厚积薄发的十年。由于他所从事的保险业中风险问题的需要，克拉梅尔的研究兴趣集中在中心极限定理及误差估计。克拉梅尔也十分关注概率论的基础理论，他在 1926 年的