

高斯相关不等式的意外证明¹

Natalie Wolchover / 文 陈洁雨 欧阳顺湘 / 译

一位德国退休学者证明了一个著名的存在已久的数学猜想，而之后的响应却并未给人留下深刻的印象。



托马斯·罗廷在他的家里

2014年7月17日清晨，德国一位鲜为人知的退休统计学家托马斯·罗廷（Thomas Royen）在刷牙时突然想到一个涉及几何学、概率论与统计学的著名猜想的证明方法。这个猜想已经困扰了诸多顶尖学者很多年。

高斯相关不等式（Gaussian correlation inequality，简称为GCI）猜想起源于20世纪50年代，从1972年形成了最简练的形式后就困住了数学家们。宾

¹ 原文来自 <https://www.quantamagazine.org/20170328-statistician-proves-gaussian-correlation-inequality/>。



夕法尼亚州立大学的统计学家理查德（Donald Richards）说：“我知道有学者在这方面研究了 40 余年，我本人就研究了 30 年。”

在浴室洗脸台边突然得到证明猜想的“原始想法”以前，罗延并没有对高斯相关不等式有过太多关注。罗延曾经是一家制药公司的雇员，于 1985 年加入一个位于德国宾根（Bingen）的规模较小的科技大学，以便有更多的时间改进工业统计学家过去经常用来处理药物试验数据的统计学公式。2014 年 7 月，作为 67 岁的退休学者，罗延仍在研究他的公式。他发现 GCI 可以被扩展成一个有关统计分布这个他所长期专注的领域的论断。在 17 日早晨，对这个扩展后的 GCI，他想到了如何计算一个关键导数，并由此获得证明。他说，“当天晚上，我就写好了证明初稿。”

由于不知道如何使用数学界最受推崇的排版工具 LaTeX，他用微软办公软件 Word 录入他的计算。次月，他就把这篇论文²上传到了学术论文预印本网站 arxiv.org。他还把论文发给了宾州大学的理查德。理查德在一年半前曾简单向人介绍他对 GCI 的一个失败证明。“我通过罗延给我的邮件得到了这篇文章”，理查德说，“看到它时，我立即知道这个问题被解决了。”

读到罗延的证明，“我真的恨自己”，理查德说。几十年来，他和其他专家一直试图用愈来愈复杂的数学方法来攻克 GCI，认定证明需要用到凸几何、概率论或分析中一些大胆的新想法。经过多年的徒然努力，一些数学家甚至开始怀疑这个不等式实际上可能是错的。然而，罗延的证明短小精简，只用到了一些经典技巧，篇幅也不过几页纸。理查德对此颇为震撼，自己和其他人都错过了这个证明。“但在另一方面，我不得不说，当我看到证明时，感到了一种解脱。”

² T. Royen, A simple proof of the Gaussian correlation conjecture extended to multivariate gamma distributions, Far East J. Theor. Stat. 48 (2014), 139–145.

他说，“我记得我曾想过，我将乐于在有生之年看到猜想的证明。”他笑道，“真的，能见到它我很高兴。”

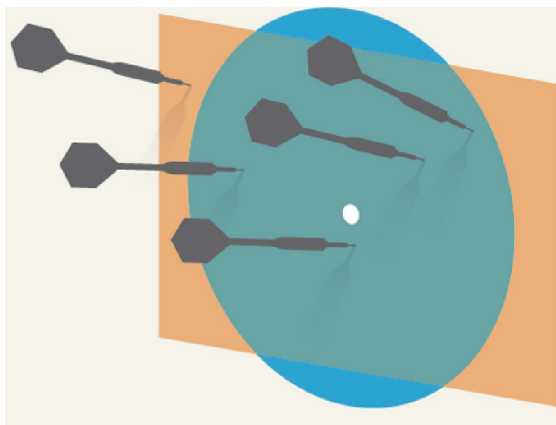
理查德通知了一些同事并且还帮助罗延用 LaTeX 重新排版了他的论文使之看起来更加专业。但是理查德和罗延联系到的其他专家却似乎对这个突如其来的新发现不以为然。多年来，关于 GCI 的错误证明层出不穷，其中甚至还包括两篇 2010 年后出现在 arxiv.org 上的文章。2015 年，以色列著名的魏茨曼科学研究所和特拉维夫大学的克拉塔 (Bo'az Klartag) 就曾收到了他同事发来的三个证明，其中包括罗延的证明。他检查了其中一个证明，发现了一个错误。因为时间不够而把其他证明晾在了一边。由于这样或那样的原因，罗延的成果被忽视了。

由于作者的低知名度，这种证明在一开始时，往往会被忽视，但通常不会持续太久：有专家表示，像罗延的这种重要的论文通常会被提交到如《统计年刊》这样的杂志上，自然就会众人皆知了。但是罗延并不需要去促进自己的事业，他选择了略过这些投稿周期长，而且在同行评审过程中要求苛刻的这类顶尖期刊，反而选择了可以快速发表的《远东理论统计学杂志》(*Far East Journal of Theoretical Statistics*)。这个期刊总部位于印度阿拉哈巴德 (Allahabad)，不为大多数专家所知。而且，相当令人不解的是，罗延被列为该期刊的编辑（他在论文发表前一年同意加入了编委会）。

由于这样的头衔，罗延的证明依旧被人们忽略。最终，在 2015 年的 12 月，波兰数学家拉塔拉 (Rafał Latała) 和他的学生马特拉克 (Dariusz Matlak) 发表文章³，重新组织了罗延的证明以使读者更容易理解。消息逐渐散播开来。几内廷 (Tilmann Gneiting) 是距离宾根仅 65 英里的海德堡理论学习研究所

的统计学家。他说他在 2016 年 7 月看到证明时非常震惊，此时距 GCI 被证明已有两年了。费城天普大学的统计学家伊兹曼 (Alan Izenman) 直到上个月被征求评论时才听说了这个证明。

没有人能明白为什么在 21 世纪的今天，罗延的证明会传播的如此缓慢。“显然，在这个交流如此方便的时代人们还缺乏交流，”克拉塔说到。“但是无论如何，至少



在凸几何中： $P(\text{飞镖同时落入圆形和矩形}) \geq P(\text{飞镖落入圆形}) \times P(\text{飞镖落入矩形})$

³ Latała, Rafał, and Dariusz Matlak. "Royen's proof of the Gaussian correlation inequality." arXiv preprint arXiv:1512.08776 (2015). 参考 <https://arxiv.org/pdf/1512.08776.pdf>.