青年评述

弱有限元方法在线弹性问题中的应用*1)

张　然 2)
(吉林大学数学学院, 长春 130012)

摘　要

本文考虑弱有限元 (简称 WG) 方法在线弹性问题中的应用. WG 方法是传统有限元方法的推广, 用于偏微分方程的数值求解. 和传统有限元一样, 它的基本思想源于变分原理. WG 方法的特点是使用在剖分单元内部和剖分单元边界上分别有定义的分片多项式函数 (即弱函数) 作为近似函数来逼近真解, 并针对弱函数定义相应的弱微分算子代入数值格式进行计算. 除此之外, WG 方法允许在数值格式中引进稳定子以实现近似函数的弱连续性. WG 方法具有允许使用任意多边形或多面体剖分, 数值格式与逼近函数构造简单, 易于满足相应的稳定性条件等优点. 本文考虑 WG 方法在求解线弹性问题中的应用. 围绕线弹性问题数值求解中常见的三个问题, 即: 数值格式的强制性, 闭锁性, 应力张量的对称性介绍 WG 方法在线弹性问题求解中的应用.

关键词: 弱有限元方法, 线弹性方程, 闭锁现象, 混合有限元方法

MR (2010) 主题分类: 65D17, 65N30, 65N15

1. 引　　言

有限元方法作为一种求解偏微分方程的数值计算方法, 在工程计算中扮演着重要的角色. 在 20 世纪 60 年代中期, 以冯康先生为代表的中国学者独立于西方学者发展了有限元方法的数学理论, 使其成为一套系统的数值计算方法. 近年来, 适用于任意多边形或多面体网格剖分的非标准有限元法得到了学者们的关注与研究, 如间断有限方法 [2, 19] (the discontinuous Galerkin methods), 拟差分法 [14] (mimetic finite difference method), 虚拟有限元方法 [8] (virtual element method), 以及本文讨论的弱有限元 (weak Galerkin finite element 简称 WG) 方法 [57–59] 等. 其中低阶拟差分法与 WG 方法结构类似但不同, 任意阶拟差分法结构与 WG 方法结构的差异较大, 间断有限元方法使用近似函数在剖分单元交界面处的跳跃以及稳定子来刻画近似函数的连续性, 虚拟有限元方法则将单元边界拓展到单元内部进行处理从而刻画近似函数的连续性, WG 方法与杂交间断有限元方法 [19] (HDG) 都使用边界元函数来刻画近似函数的弱连续性, 两者结构有一定的相似性, 但两种方法的构造理念不同, 且它们的数值格式一般情况下不等价, 例如, 对于一般变系数的二阶椭圆问题两者不等价. 目前, 在复杂工程问

* 2020 年 1 月 4 日收到.
1) 国家自然科学基金 (11971198、11726102、11771179) 和中国教育部长江学者计划以及吉林大学符号计算与知识工程教育部重点实验室等资助.

2) 作者简介: 张然, 吉林大学数学学院教授. 1999 年和 2004 年在吉林大学分别获得学士和博士学位, 2008 年任吉林大学教授. 主要研究领域包括有限元方法、随机微分、积分方程数值解、多尺度分析及应用. 曾入选教育部新世纪人才奖励计划 (2013)、入选教育部 "长江学者奖励计划" 青年学者 (2016) 等. 截止目前, 在学术期刊上发表论文 60 余篇.

题的高效、精确求解方面, 有限元方法及其相关的各种新的数值计算方法层出不穷地涌现, 仍处在百花齐放的阶段.

本文研究使用 WG 方法求解线弹性问题. WG 方法最早由王军平和叶秀在 2011 年提出, 该方法的区域剖分采用任意多边形或多面体剖分 [42], 而逼近函数空间选取弱函数空间, 其元素为分别在剖分单元内部和单元边界有定义的间断函数. 同时, WG 方法可以引进稳定子以刻画弱函数在单元之间的联系. 传统有限元方法在构造近似函数空间时, 主要困难之一来自于函数的连续性. 而在 WG 方法中, 近似函数的连续性由边界函数和稳定子来刻画. 由于边界函数和稳定子可以根据需要定义, 因此 WG 方法在网格的选取和基底的构造上具有很大的灵活性. 在过去的几年里, WG 方法受到国内外许多学者的关注与研究, 并取得了丰富的研究成果. 如: WG 方法的两水平格式 [33], WG 方法的多重网格法 [18,49], WG 方法的先验、后验误差估计 [36,40], WG 方法的后处理技术 [65], WG 方法的极大值原理 [60], 使用最小二乘法对 WG 方法进行改进 [43], WG 方法近似函数空间选取规则研究 [56], 原始 - 对偶 WG 方法 [54], 旋度连续 WG 方法 [52], 使用 WG 方法求解: 分数阶扩散方程 [82], 随机交界面光栅问题 [7], 变分不等式问题 [20,47], 交界面问题 [45], 非定常对流问题 [21], 特征值问题 [71–73], 不可压流问题 [79] 等. 除此外 WG 方法也被应用于求解各种经典的偏微分方程问题. 如：二阶椭圆方程 [29,35,78], Darcy 方程 [37,68], Navier-Stokes 方程 [28,38,75,80], Stokes 方程 [16,34,39,59,62,66,76,81], 抛物方程 [83,84], Brinkman 方程 [41,67,74], 双调和方程 [44,77], 多孔线弹性方程 [51], Cahn-Hilliard 方程 [61] 等. 本文关注 WG 方法在求解线弹性问题中的应用 [17,23,55,63,64,70]. 文献 [70] 与文献 [23] 分别在三角形或四面体和四边形或六面体单元上考虑线弹性问题, 并且通过 RT 元定义近似函数的微分, 得到了稳定的数值格式并证明了数值格式的 “无闭锁” 性质. 特别的, 这两种数值格式不使用稳定子. 文献 [55] 中作者对满足形状正则性条件的网格剖分构造了具有 “无闭锁” 性质的数值格式. 文献 [17] 与文献 [64] 讨论使用 WG 方法求解混合形式线弹性问题, 虽然两者数值格式不同, 但都实现了满足强对称性应力张量的求解. 篇幅原因, 本文不能对已有工作进行全面地描述, 因此本文将围绕线弹性问题数值求解中常见的几个问题选取已有结果中具有代表性的解决方法对 WG 方法在线弹性问题中的应用问题进行阐述.

线弹性问题研究的是在一定假设条件下, 弹性体受外力作用时体内的应力, 应变和位移之间的关系. 它在生产和生活中有着十分广泛的应用, 如房屋和桥梁的设计等都涉及到弹性力学分析. 某些弹塑性材料, 如汽车、飞机的轮胎在变形的初期也满足线弹性方程. 而线弹性方程本身结构复杂, 在数值求解中存在许多困难. 本文旨在介绍 WG 方法在解决线弹性问题中数值格式的强制性、数值解与真解之间误差的参数依赖性、混合形式线弹性方程中应力张量的对称性三个问题上的应用.

定义 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d=2,3)$ 为具有 Lipschitz 连续边界 $\Gamma=\partial\Omega$ 的有界区域, 且 Γ 的两个子集 $\Gamma_N, \Gamma_D \neq \emptyset$ 满足 $\Gamma=\Gamma_D\cup\Gamma_N$, $\Gamma_D\cap\Gamma_N=\emptyset$. 记弹性体所受外力的单位体密度为 $\mathbf{f}$. 线弹性问题考虑: 求位移 $\mathbf{u}$ 满足

$$-\nabla\cdot\sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{f}, \quad 在\ \Omega, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{u} = \widehat{\mathbf{u}}, \quad 在\ \Gamma_D, \tag{1.2}$$

$$\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = \widehat{\mathbf{t}}, \quad 在\ \Gamma_N, \tag{1.3}$$

其中 $\mathbf{n}$ 为边界 Γ_N 的单位外法方向, $\sigma(\mathbf{u})$ 为应力张量. 对于线性、均匀、各向同性弹性体, 应

力张量定义为

$$\sigma(\mathbf{u})=2\mu\varepsilon(\mathbf{u})+\lambda(\nabla\cdot\mathbf{u})\mathbf{I},$$

上式中 $\varepsilon(\mathbf{u})=\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\nabla\mathbf{u}^T)$ 为线性应变张量, μ 和 λ 为 Lamé 常数. 对于平面应变问题, Lamé 常数的定义为

$$\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},\qquad \mu=\frac{E}{2(1+\nu)},$$

对于平面应力问题, Lamé 常数的定义为

$$\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-\nu)},\qquad \mu=\frac{E}{2(1+\nu)},$$

其中 E 是弹性模量, ν 是泊松比.

记空间 $L^2(\Omega)$, $[L^2(\Omega)]^d$ 和 $[L^2(\Omega)]^{d\times d}$ 上的内积为 $(\cdot,\cdot)$. 传统有限元方法考虑线弹性方程 (1.1)-(1.3) 的应变 - 散度弱形式: 求 $\mathbf{u}\in[H^1(\Omega)]^d$, 满足 $\mathbf{u}|_{\Gamma_D}=\widehat{\mathbf{u}}$ 以及

$$(2\mu\varepsilon(\mathbf{u}),\varepsilon(\mathbf{v}))+(\lambda\nabla\cdot\mathbf{u},\nabla\cdot\mathbf{v})=(\mathbf{f},\mathbf{v})+\langle\widehat{\mathbf{t}},\mathbf{v}\rangle_{\Gamma_N},\quad\forall\mathbf{v}\in[H_D^1(\Omega)]^d,\tag{1.4}$$

其中 $H_D^1(\Omega)$ 为 Sobolev 空间 $H^1(\Omega)$ 在边界 Γ_D 上为 0 的子空间. 考虑双线性形式 $(2\mu\varepsilon(\cdot),\varepsilon(\cdot))$ $+(\lambda\nabla\cdot(\cdot),\nabla\cdot(\cdot))$ 与 $[H_D^1(\Omega)]^d$ 空间中范数的关系. 以二维为例

$$\begin{aligned}&(2\mu\varepsilon(\mathbf{u}),\varepsilon(\mathbf{u}))+(\lambda\nabla\cdot\mathbf{u},\nabla\cdot\mathbf{u})\\=\;&\int_\Omega 2\mu\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2\right)+\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2dT.\end{aligned}\tag{1.5}$$

空间 $[H_D^1(\Omega)]^2$ 中的范数为

$$\|\mathbf{u}\|_1^2=\int_\Omega u_1^2+u_2^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2dT.$$

显然 H^1 范数不能被双线性形式 (1.5) 控制, 故不能直接进行分析. 因此, 强制性是构造线弹性问题数值格式首要考虑的问题.

从弱形式 (1.4) 出发定义的有限元数值格式, 其数值解与真解的误差将依赖于系数 λ. 然而, 当弹性体趋于不可压缩时, 即当 Poisson 比 ν 接近 $\frac{1}{2}$ 时, 参数 λ 趋于无穷. 这种数值结果依赖于无界参数的现象称为闭锁现象 [31, 69]. 构造具有 "无闭锁" 性质的数值格式是求解线弹性问题的难点之一. 在 1983 年, Vogelious [53] 证明了 p- 格式有限元法在光滑区域上具有 "无闭锁" 现象. Babuška 和 Suri [6] 发现对于协调元, 在矩形剖分上对任意近似多项式空间次数 $k\geq 1$ 数值解都是闭锁的. 在间断 Galerkin 方法下, Hansbo 和 Larson [22] 证明了对任意 $k\geq 1$ 间断 Galerkin 方法的数值近似都是 "无闭锁" 的等, 对线弹性方程闭锁性的研究有很多. 本文介绍了如何使用 WG 方法构造线弹性问题的 "无闭锁" 数值格式.

以上的论述我们考虑的问题是求解位移变量 $\mathbf{u}$, 而线弹性方程常被用来做应力分析, 因此需要求解应力张量 σ. 由于从位移求解应力, 需要对其进行求导, 精度较低. 因此我们考虑线弹性方程的以下混合格式: 求 $(\sigma,\mathbf{u})\in H(\mathrm{div},\Omega;\mathbb{S})\times[L^2(\Omega)]^d$ 满足

$$\begin{aligned}(\Lambda\sigma,\tau)+(\nabla\cdot\tau,\mathbf{u})-\langle\tau\mathbf{n},\mathbf{u}\rangle_{\Gamma_N}&=\langle\tau\mathbf{n},\widehat{\mathbf{u}}\rangle_{\Gamma_D},\quad\forall\tau\in H(\mathrm{div},\Omega;\mathbb{S}),\\(\nabla\cdot\sigma,\mathbf{v})-\langle\sigma\mathbf{n},\mathbf{v}\rangle_{\Gamma_N}&=-(\mathbf{f},\mathbf{v})-\langle\widehat{\mathbf{t}},\mathbf{v}\rangle_{\Gamma_N},\quad\forall\mathbf{v}\in[L^2(\Omega)]^d,\end{aligned}$$

其中 $H(\mathrm{div},\Omega;\mathbb{S})$ 是本身及其散度 L^2 可积的对称矩阵值函数空间, Λ 为应力与应变之间满足的线性本构关系算子. 取有限元空间 $\Sigma_h\subset H(\mathrm{div},\Omega;\mathbb{S})$, $V_h\subset[L^2(\Omega)]^d$. 由混合问题的经典理论 [12,13] 可知, 数值解存在唯一且收敛, 只需满足下列条件:

- 近似空间满足

$$\nabla\cdot\Sigma_h\subset V_h. \tag{1.6}$$

- 存在有界线性算子 $\Pi_h: H^1(\Omega,\mathbb{S})\to\Sigma_h$, 且有

$$(\nabla\cdot(\Pi_h\sigma-\sigma),\mathbf{v})=0,\quad \forall\mathbf{v}\in V_h. \tag{1.7}$$

由于需要构造矩阵、向量值函数空间组合, 且由于剪应力互等的关系, 应力 σ 为对称矩阵, 这给相应的函数空间组合构造带来困难 [5,24–27]. 为克服此困难我们也可以考虑放松对 σ 对称性的要求, 从而要求其具有某种弱对称性 [1,3] 或者使用非协调元方法 [5] 减弱对函数连续性的要求, 本文介绍了 WG 方法作为一种非协调元方法在求解应力张量方面的工作.

线弹性问题由于其应用广泛且求解困难而受到了广泛的关注与研究, 除传统有限元方法 [11,13] 外各种其他数值方法也被用以求解线弹性问题如: 有限差分法 [48], 有限体积法 [32], 间断 Galerkin 有限元法 [50], 虚拟有限元法 [9], Dual-primal 方法 [30], 最小二乘法 [15] 等, 本文考虑使用 WG 方法 [55,63,64] 来求解线弹性问题.

本文第二章给出 WG 数值格式一般形式, 论证了 WG 格式在满足局部 Dirichlet 边值条件时的强制性. 第三章论述了 “无闭锁” WG 数值格式的构造方法. 第四章着重构造了稳定的、满足应力张量对称性的混合形式线弹性方程 WG 数值格式. 最后在第五章对本文进行总结, 并展望与此课题相关的未来工作.

2. 弱有限元数值格式的强制性

假设 $\mathcal{T}_h$ 为区域 Ω 的一个满足形状正则性条件 [58] 的剖分. 记 $\mathcal{E}_h$ 为 $\mathcal{T}_h$ 中边的集合, $\mathcal{E}_h^0=\mathcal{E}_h/\Gamma$ 为 $\mathcal{E}_h$ 中所有内边的集合. 对任意的单元 $T\in\mathcal{T}_h$, 定义 h_T 为其外接圆或外接球直径, 并定义 $h=\max_{T\in\mathcal{T}_h}h_T$ 为剖分 $\mathcal{T}_h$ 的网格尺寸. 对任意的边 $e\in\mathcal{E}_h$ 定义 h_e 为其长度或外接圆直径. 定义弱函数空间 V_h.

$$V_h=\{\mathbf{v}_h=\{\mathbf{v}_0,\mathbf{v}_b\}:\mathbf{v}_0|_T\in V_{h,0}(T),\forall T\in\mathcal{T}_h,\mathbf{v}_b|_e\in V_{h,b}(e),\forall e\in\mathcal{E}_h\},$$

其中 $V_{h,0}(T)$ 和 $V_{h,b}(e)$ 为分别定义在单元 T 和单元边界 e 上的多项式空间. 记 $V_{h,D}^0$ 为 V_h 的满足在 Γ_D 处 $\mathbf{v}_b=\mathbf{0}$ 的子空间.

显然对于空间 V_h 里的弱函数, 传统微分算子的定义不再成立. 这里我们针对弱函数定义弱散度算子和弱梯度算子.

定义 1. [58,59] 记函数 $\mathbf{v}_h\in V_h$ 的弱散度为 $\nabla_w\cdot\mathbf{v}_h\in W_{h,d}$, 其定义为

$$\begin{aligned}(\nabla_w\cdot\mathbf{v}_h)|_T &= \nabla_{w,T}\cdot(\mathbf{v}_h|_T),\quad \mathbf{v}_h\in V_h,\\ (\nabla_{w,T}\cdot\mathbf{v}_h,\phi)_T &= -(\mathbf{v}_0,\nabla\phi)_T+\langle\mathbf{v}_b\cdot\mathbf{n},\phi\rangle_{\partial T},\quad \forall\phi\in W_{h,d}(T).\end{aligned}\tag{2.1}$$

定义 2. [57, 59] 记函数 $\mathbf{v}_h \in V_h$ 的弱梯度为 $\nabla_w \mathbf{v}_h \in W_{h,g}$, 其定义为

$$\begin{aligned}(\nabla_w \mathbf{v}_h)|_T &= \nabla_{w,T}(\mathbf{v}_h|_T), \quad \mathbf{v}_h \in V_h,\\ (\nabla_{w,T}\mathbf{v}_h, \phi)_T &= -(\mathbf{v}_0, \nabla\cdot\phi)_T + \langle \mathbf{v}_b, \phi\mathbf{n}\rangle_{\partial T}, \quad \forall \phi \in W_{h,g}(T).\end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 $W_{h,d}(T)$ 和 $W_{h,g}(T)$ 为分别定义在单元 T 上的标量值和矩阵值多项式空间. 我们使用弱梯度算子定义弱应变算子:

$$\varepsilon_w(\mathbf{v}_h) = \frac{1}{2}(\nabla_w \mathbf{v}_h + \nabla_w \mathbf{v}_h^T). \tag{2.3}$$

对于 WG 方法的近似函数空间, 我们需要考虑四个空间: $\{V_{h,0}(T), V_{h,b}(e), W_{h,d}(T), W_{h,g}(T)\}$ 的选取.

2.1. WG 数值格式的强制性

当 $\Gamma_N = \emptyset$ 时, 即问题 (1.1)–(1.3) 为 Dirichlet 边值问题时:

$$-\nabla\cdot(2\mu\varepsilon(\mathbf{u}) + \lambda(\nabla\cdot\mathbf{u})\mathbf{I}) = \mathbf{f}, \qquad 在\ \Omega, \tag{2.4}$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}, \qquad 在\ \Gamma, \tag{2.5}$$

等价于:

$$\begin{aligned}-\mu\Delta\mathbf{u} - (\mu+\lambda)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) &= \mathbf{f}, \qquad 在\ \Omega,\\ \mathbf{u} &= \hat{\mathbf{u}}, \qquad 在\ \Gamma.\end{aligned}$$

该格式的一个变分问题为: 求 $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^d$ 满足 $\mathbf{u}|_\Gamma = \hat{\mathbf{u}}$ 并且

$$\mu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + (\mu+\lambda)(\nabla\cdot\mathbf{u}, \nabla\cdot\mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d. \tag{2.6}$$

我们称该格式为梯度 - 散度格式. 当 $\Gamma_N \neq \emptyset$ 时混合边值条件问题 (1.1)–(1.3) 与梯度 - 散度格式 (2.6) 不等价. 对于 (2.6), 其强制性可类似于 Poisson 问题给出, 对于应变 - 散度格式 (1.4), 需要借助 Korn's 不等式来得到强制性 [10, 46, 55].

这里我们截取文献 [55] 中对应变 - 散度格式强制性的说明. 首先在每个单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 上定义 RM (rigid motion) 空间:

$$\mathsf{RM}(T) = \{\mathbf{a} + \eta\mathbf{x} : \mathbf{a} \in \mathbb{R}^d,\ \eta \in so(d)\},$$

其中 $\mathbf{x}$ 是单元上的位置向量, $so(d)$ 是 $d\times d$ 维反对称矩阵空间. RM 空间中函数在每条边 $e \subset \partial T$ 上的迹函数组成一个有限维空间:

$$P_{RM}(e) = \{\mathbf{v} \in [L^2(e)]^d :\ \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}|_e,\ \tilde{\mathbf{v}} \in \mathsf{RM}(T)\}.$$

近似函数空间选取

$$\{V_{h,0}, V_{h,b}, W_{h,d}, W_{h,g}\} = \{[P_k(T)]^d, [P_{k-1}(e)]^d + P_{RM}(e), P_{k-1}(T), [P_{k-1}(T)]^{d\times d}\}.$$

定义双线性形式:

$$
\begin{aligned}
s_1(\mathbf{w}_h,\mathbf{v}_h) &= \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^{-1}\langle Q_{h,b}\mathbf{w}_0-\mathbf{w}_b, Q_{h,b}\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_b\rangle_{\partial T}, &(2.7)\\
a_1(\mathbf{w}_h,\mathbf{v}_h) &= 2(\mu\varepsilon_w(\mathbf{w}_h),\varepsilon_w(\mathbf{v}_h))+(\lambda\nabla_w\cdot\mathbf{w}_h,\nabla_w\cdot\mathbf{v}_h)+s_1(\mathbf{w}_h,\mathbf{v}_h), &(2.8)
\end{aligned}
$$

其中 $\mathbf{w}_h,\mathbf{v}_h\in V_h$, $(\cdot,\cdot)=\sum_{T\in\mathcal{T}_h}(\cdot,\cdot)_T$, $Q_{h,b}$ 为在每条边 $e\in\mathcal{E}_h$ 上到 $V_{h,b}(e)$ 的 L^2 投影算子. 定义线弹性方程 (1.1)-(1.3) 的一个 WG 数值格式为:

数值格式 1. 求 $\mathbf{u}_h=\{\mathbf{u}_0,\mathbf{u}_b\}\in V_h$ 满足 $\mathbf{u}_b|_{\Gamma_D}=Q_{h,b}\widehat{\mathbf{u}}$ 并且

$$
a_1(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h)=(\mathbf{f},\mathbf{v}_0)+\langle\widehat{\mathbf{t}},\mathbf{v}_b\rangle_{\Gamma_N},\qquad \forall\mathbf{v}_h=\{\mathbf{v}_0,\mathbf{v}_b\}\in V_{h,D}^0. \tag{2.9}
$$

定义弱有限元空间 V_h 上的半范数

$$
|\!|\!|\mathbf{v}_h|\!|\!|_1=\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}(\|\varepsilon_w(\mathbf{v}_h)\|_T^2+\lambda\|\nabla_w\cdot\mathbf{v}_h\|_T^2+h_T^{-1}\|Q_{h,b}\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_b\|_{\partial T}^2)\Big)^{\frac12},\quad \mathbf{v}_h\in V_h. \tag{2.10}
$$

引理 1. 半范数 $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_1$ 是空间 $V_{h,D}^0$ 上的范数.

证明. 我们只需证明 $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_1$ 的正性. 假设对于 $\mathbf{v}_h\in V_{h,D}^0$, 有 $|\!|\!|\mathbf{v}_h|\!|\!|_1=0$. 故在每个单元 $T\in\mathcal{T}_h$ 上 $\varepsilon_w(\mathbf{v}_h)=0$ 并且在 ∂T 上 $Q_{h,b}\mathbf{v}_0=\mathbf{v}_b$. 由 (2.2) 和 (2.3) 可得

$$
\begin{aligned}
(\varepsilon_w(\mathbf{v}_h),\varphi)_T &=\left(\nabla\mathbf{v}_0,\frac12(\varphi+\varphi^T)\right)_T-\left\langle\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_b,\frac12(\varphi+\varphi^T)\mathbf{n}\right\rangle_{\partial T}\\
&=(\varepsilon(\mathbf{v}_0),\varphi)_T-\left\langle Q_{h,b}\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_b,\frac12(\varphi+\varphi^T)\mathbf{n}\right\rangle_{\partial T}
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

对任意的 $\varphi\in[P_{k-1}(T)]^{d\times d}$ 都成立. 因此有

$$
|(\varepsilon(\mathbf{v}_0),\varphi)_T|\le\|\varepsilon_w(\mathbf{v}_h)\|_T\|\varphi\|_T+\|Q_{h,b}\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_b\|_{\partial T}\left\|\frac12(\varphi+\varphi^T)\mathbf{n}\right\|_{\partial T}. \tag{2.12}
$$

由迹不等式和逆不等式有

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac12(\varphi+\varphi^T)\mathbf{n}\right\|_{\partial T} &\le C\left(h_T^{-1}\|\varphi\|_T^2+h_T\|\nabla\varphi\|_T^2\right)^{\frac12}\\
&\le Ch_T^{-\frac12}\|\varphi\|_T.
\end{aligned}
$$

将上式代入 (2.12) 可得

$$
|(\varepsilon(\mathbf{v}_0),\varphi)_T|\le\left(\|\varepsilon_w(\mathbf{v}_h)\|_T+Ch_T^{-\frac12}\|Q_{h,b}\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_b\|_{\partial T}\right)\|\varphi\|_T.
$$

由此可得

$$
\|\varepsilon(\mathbf{v}_0)\|_T^2\le 2\|\varepsilon_w(\mathbf{v}_h)\|_T^2+Ch_T^{-1}\|Q_{h,b}\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_b\|_{\partial T}^2. \tag{2.13}
$$

从而在每个单元 $T\in\mathcal{T}_h$ 上 $\varepsilon(\mathbf{v}_0)=0$. 由于 RM 空间为算子 $\varepsilon(\cdot)$ 的核空间, 因此 $\mathbf{v}_0\in\mathsf{RM}(T)$, 故有 $\mathbf{v}_0|_e=Q_{h,b}(\mathbf{v}_0|_e)=\mathbf{v}_b$, 则 $\mathbf{v}_h$ 在 Ω 上连续. 由第二 Korn's 不等式, 即 $\|\mathbf{v}_0\|_1\le C\|\varepsilon(\mathbf{v}_0)\|$, 我们有在 Ω 上 $\mathbf{v}_h$ 为常数. 又因为在 Γ_D 上 $\mathbf{v}_b=\mathbf{0}$, 在 ∂T 上 $\mathbf{v}_0=\mathbf{v}_b$. 因此在 Ω 上 $\mathbf{v}_h\equiv\mathbf{0}$.

类似地我们可证明: 存在正常数 α_1, α_2, 使得对于空间 $V_{h,D}^0$ 中的任意函数 $\mathbf{v}_h$ 有

$$\begin{aligned}\alpha_1 \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \left(\|\nabla \mathbf{v}_0\|_T^2 + h_T^{-1}\|Q_{h,b}\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b\|_{\partial T}^2\right) \quad &\leq \quad \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \left(\|\varepsilon_w(\mathbf{v}_h)\|_T^2 + h_T^{-1}\|Q_{h,b}\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b\|_{\partial T}^2\right) \\ &\leq \quad \alpha_2 \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \left(\|\nabla \mathbf{v}_0\|_T^2 + h_T^{-1}\|Q_{h,b}\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b\|_{\partial T}^2\right).\end{aligned}$$

由以上结果易得以下定理.

定理 1. WG 数值格式 1 的解存在且唯一.

2.2. 弱有限元方法中的稳定子

由于我们考虑问题的真解往往具有一定的连续性, 而我们使用的近似函数在单元边界和单元内部可以是间断的, 为此我们可以像上节论述的一样在格式中引入稳定子 (2.7), 也可以通过选取满足下列条件的近似函数空间以得到稳定的 WG 数值格式:

1 对任意的 $\mathbf{v} \in V_h$, 若 $\nabla_w \mathbf{v} = 0$ 则 $\mathbf{v}$ 在 Ω 上为常数;

2 存在投影算子 $Q_h : [H^1(\Omega)]^d \to V_h$, $\mathbf{Q}_h : [H^1(\Omega)]^{d\times d}$, 满足 $\nabla_w(Q_h\mathbf{v}) = \mathbf{Q}_h(\nabla\mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in V_h$.

例如在文献 [23,70] 中作者使用 RT 元近似位移的梯度使上述条件满足, 进而避免了使用稳定子.

3. 具有"无闭锁"性质的弱有限元数值格式

3.1. 线弹性问题的正则性

当弹性体趋于不可压缩时, 即 $\nu = \frac{1}{2}$ 或者 $\lambda = \infty$ 时, 数值解与真解之间的误差会出现不收敛的现象, 也就是闭锁现象. 为证明一个数值格式的"无闭锁"性质, 我们常使用线弹性问题 (1.1)–(1.3) 的如下正则性:

$$\|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)} + \lambda\|\nabla\cdot\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq C\left(\|\hat{\mathbf{u}}\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_D)} + \|\hat{\mathbf{t}}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N)} + \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}\right), \tag{3.1}$$

其中 C 为一正常数.

例如文献 [23] 在四边形或六面体剖分上使用近似函数空间 $\{Q_0^d, Q_0^d, RT_{[0]}^d, Q_0\}$, 考虑变分问题: 求 $\mathbf{u}_h \in V_h$, 满足 $\mathbf{u}_h|_{\Gamma_D} = Q_{h,b}(\hat{\mathbf{u}})$ 且

$$\mu(\nabla_w\mathbf{u}_h, \nabla_w\mathbf{v}) + (\mu+\lambda)(\nabla_w\cdot\mathbf{u}_h, \nabla_w\cdot\mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_0),$$

其中 $\Gamma_N = \emptyset$, Q_0^d 和 Q_0 分别为各分量次数不超过 0 的向量值和标量值多项式空间, $Q_{h,b}$ 为在每条边 $e \in \mathcal{E}_h$ 上到空间 $V_{h,b}(e)$ 的投影算子. 该问题的数值解 $\mathbf{u}_h$ 与真解 $\mathbf{u}$ 之间的误差满足

$$\|\nabla\mathbf{u} - \nabla_w\mathbf{u}_h\| \leq Ch(\|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)} + \lambda\|\nabla\cdot\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}) \leq Ch(\|\mathbf{f}\|_0 + \|\hat{\mathbf{u}}_D\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_D)}).$$

3.2. 引入新变量 $p=\lambda\nabla\cdot\mathbf{u}$

另一种常用的证明 “无闭锁” 性质的方式是引入一个新变量使线弹性问题变形为一个 Stokes 问题. 记 $p=\lambda\nabla\cdot\mathbf{u}$, 线弹性问题 (1.1)–(1.3) 可以变形为: 求 $\mathbf{u}$ 和 p 满足 $\mathbf{u}|_{\Gamma_D}=\widehat{\mathbf{u}}$, 并且

$$
\begin{aligned}
-\nabla\cdot(2\mu\varepsilon(\mathbf{u}))-\nabla p=\mathbf{f}, &\qquad \text{在 } \Omega,\\
\nabla\cdot\mathbf{u}=\lambda^{-1}p, &\qquad \text{在 } \Omega,\\
(2\mu\varepsilon(\mathbf{u})+p\mathbf{I})\mathbf{n}=\widehat{\mathbf{t}}, &\qquad \text{在 } \Gamma_N.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

问题 (3.2) 的一个变分问题为: 求 $\mathbf{u}\in[H^1(\Omega)]^d$, $p\in L^2(\Omega)$ 满足 $\mathbf{u}|_{\Gamma_D}=\widehat{\mathbf{u}}$,

$$
2(\mu\varepsilon(\mathbf{u}),\varepsilon(\mathbf{v}))+(\nabla\cdot\mathbf{v},p)=(\mathbf{f},\mathbf{v})+\langle\widehat{\mathbf{t}},\mathbf{v}\rangle_{\Gamma_N},\quad \forall\mathbf{v}\in[H_D^1(\Omega)]^d, \tag{3.3}
$$

$$
(\nabla\cdot\mathbf{u},q)-(\lambda^{-1}p,q)=0,\quad \forall q\in L^2(\Omega). \tag{3.4}
$$

对 (3.3)–(3.4) 使用 WG 方法, 需要引入一个辅助变量 p_h. 定义有限元近似空间

$$
W_h=\{q_h:\ q_h|_T\in P_{k-1}(T),\ T\in\mathcal{T}_h\},
$$

及其半范数,

$$
|\!|\!|q_h|\!|\!|_2=\left(h\sum_{e\in\mathcal{E}_h^0}\|[\![q_h]\!]_e\|_e^2+h^2\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\|\nabla q_h\|_T^2\right)^{\frac{1}{2}},\qquad q_h\in W_h,
$$

其中 $[\![q_h]\!]$ 为 $q_h\in W_h$ 在 $e\in\mathcal{E}_{h,0}$ 上的跳, 满足

$$
[\![q_h]\!]_e=q_h|_{T_1}-q_h|_{T_2},\quad e\in\mathcal{E}_{h,0},
$$

并且

$$
[\![q_h]\!]_e=q_h,\quad e\subset\partial\Omega,
$$

这里 T_1, T_2 的交为边 e. 由于我们考虑的都是 $[\![q_h]\!]$ 的范数, 所以 T_1 和 T_2 的顺序不影响分析. 定义双线性形式

$$
\begin{aligned}
a_2(\mathbf{w}_h,\mathbf{v}_h) &= 2(\mu\varepsilon_w(\mathbf{w}_h),\varepsilon_w(\mathbf{v}_h))+s_1(\mathbf{w}_h,\mathbf{v}_h),\quad \mathbf{w}_h,\mathbf{v}_h\in V_h,\\
b_2(\mathbf{v}_h,q_h) &= (\nabla_w\cdot\mathbf{v}_h,q_h),\quad \mathbf{v}_h\in V_h,q_h\in W_h,\\
d_2(p_h,q_h) &= \lambda^{-1}(p_h,q_h),\quad p_h,q_h\in W_h.
\end{aligned}
$$

数值格式 2. 求 $\mathbf{u}_h=\{\mathbf{u}_0,\mathbf{u}_b\}\in V_h$ 和 $p_h\in W_h$ 满足 $\mathbf{u}_b|_{\Gamma_D}=Q_{h,b}\widehat{\mathbf{u}}$ 和

$$
a_2(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h)+b_2(\mathbf{v}_h,p_h) = (\mathbf{f},\mathbf{v}_0)+\langle\widehat{\mathbf{t}},\mathbf{v}_b\rangle_{\Gamma_N},\quad \forall\mathbf{v}_h\in V_{h,D}^0, \tag{3.5}
$$

$$
b_2(\mathbf{u}_h,q_h)-d_2(p_h,q_h) = 0,\quad \forall q_h\in W_h. \tag{3.6}
$$

引理 2. [55] 数值格式 1 和 2 等价. 即 (2.9) 的解和 (3.5)–(3.6) 的解相等.

证明. 假设 $\tilde{\mathbf{u}}_h$ 和 $\tilde{p}_h$ 是 (3.5)–(3.6) 的解. 注意 (3.6) 可以写成

$$(\nabla_w \cdot \tilde{\mathbf{u}}_h, q)_T - \lambda^{-1}(\tilde{p}_h, q)_T = 0, \qquad \forall q \in P_{k-1}(T),\ \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

由于 $\nabla_w \cdot \tilde{\mathbf{u}}_h \in P_{k-1}(T)$, $T \in \mathcal{T}_h$, 则由上式可得

$$\tilde{p}_h = \lambda \nabla_w \cdot \tilde{\mathbf{u}}_h. \tag{3.7}$$

将 (3.7) 代入 (3.5) 可得

$$a_2(\tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + \lambda b_2(\mathbf{v}_h, \nabla_w \cdot \tilde{\mathbf{u}}_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_0) + \langle \widehat{\mathbf{t}}, \mathbf{v}_b \rangle_{\Gamma_N}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_{h,D}^0.$$

注意到

$$a_2(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) + \lambda b_2(\mathbf{v}_h, \nabla_w \cdot \mathbf{w}_h) = a_1(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h), \quad \mathbf{w}_h,\ \mathbf{v}_h \in V_h.$$

因此

$$a_1(\tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_0) + \langle \widehat{\mathbf{t}}, \mathbf{v}_b \rangle_{\Gamma_N}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_{h,D}^0,$$

这与 (2.9) 相同. 再由解的唯一性知, $\tilde{\mathbf{u}}_h$ 与数值格式 1 的解相同. 类似地可以证明 (2.9) 的解 $\mathbf{u}_h$ 满足 $(\mathbf{u}_h; \lambda \nabla_w \cdot \mathbf{u}_h)$ 是 (3.5)–(3.6) 的解.

对任意单元 $T \in \mathcal{T}_h$, 令 $Q_{h,0}$ 为到 $V_{h,0}(T)$ 的 L^2 投影算子. 对任意的 $e \subset \partial T$, $Q_{h,b}$ 的定义已经给出. 记 Q_h 为从 $[H^1(\Omega)]^d$ 到有限元空间 V_h 的映射, 对任意 $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^d$, $Q_h\mathbf{u}$ 在每一个单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 上满足

$$Q_h\mathbf{u} \ := \{Q_{h,0}\mathbf{u}, Q_{h,b}\mathbf{u}\}.$$

令 $\mathcal{Q}_h$ 和 $\mathbf{Q}_h$ 分别为到 $W_{h,d}(T)$ 和 $W_{h,g}(T)$ 的 L^2 投影算子. 对 (3.5)–(3.6) 的 WG 数值解 $(\mathbf{u}_h; p_h) = (\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_b\}; p_h) \in V_h \times W_h$ 定义误差函数 $\mathbf{e}_h$ 和 ζ_h:

$$\mathbf{e}_h = \{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_b\} = \{Q_{h,0}\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, Q_{h,b}\mathbf{u} - \mathbf{u}_b\}, \tag{3.8}$$

$$\zeta_h = \mathcal{Q}_h p - p_h, \tag{3.9}$$

其中 $(\mathbf{u}; p)$ 是变分问题 (3.3)–(3.4) 的真解. 易得 $\mathbf{e}_h \in V_{h,D}^0$ 并且 $\zeta_h \in W_h$.

引理 3. [55] 误差函数 $\mathbf{e}_h$ 和 ζ_h 满足下列误差方程

$$a_2(\mathbf{e}_h, \mathbf{v}_h) + b_2(\mathbf{v}_h, \zeta_h) = \varphi_{\mathbf{u},p}(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_{h,D}^0, \tag{3.10}$$

$$b_2(\mathbf{e}_h, q_h) - d_2(\zeta_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in W_h, \tag{3.11}$$

其中

$$\varphi_{\mathbf{u},p}(\mathbf{v}_h) = \ell_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_h) + \theta_p(\mathbf{v}_h) + s(Q_h\mathbf{u}, \mathbf{v}_h), \tag{3.12}$$

$$\ell_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_h) = 2\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b, \mu(\varepsilon(\mathbf{u}) - \mathbf{Q}_h\varepsilon(\mathbf{u}))\mathbf{n} \rangle_{\partial T}, \tag{3.13}$$

$$\theta_p(\mathbf{v}_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b, (p - \mathcal{Q}_h p)\mathbf{n} \rangle_{\partial T}. \tag{3.14}$$

定理 2. [55] 对于 (3.3)–(3.4) 的解 $(\mathbf{u};p)\in[H^{k+1}(\Omega)]^d\times H^k(\Omega)$, $k\geq 1$. WG 格式 (3.5)–(3.6) 的数值解 $(\mathbf{u}_h;p_h)\in V_h\times W_h$ 满足

$$\begin{aligned}|\!|\!| Q_h\mathbf{u}-\mathbf{u}_h |\!|\!|_1+\lambda^{-\frac{1}{2}}\|\mathcal{Q}_hp-p_h\|+|\!|\!|\mathcal{Q}_hp-p_h|\!|\!|_2 &\leq Ch^k(\|\mathbf{u}\|_{k+1}+\|p\|_k), \qquad (3.15)\\ \|Q_{h,0}\mathbf{u}-\mathbf{u}_0\| &\leq Ch^{k+1}\big(\|\mathbf{u}\|_{k+1}+\|p\|_k\big). \qquad (3.16)\end{aligned}$$

其中 C 为与 λ 无关的正常数.

由于常数 C 与 λ 无关, 因此数值格式 2 具有 "无闭锁" 性质. 又由于数值格式 1 和 2 等价, 因此数值格式 1 也是 "无闭锁" 的.

4. 混合形式线弹性问题的 WG 数值格式

本节我们考虑可以直接求解应力张量的混合形式线弹性方程. 为此, 我们把线弹性问题 (1.1)–(1.3) 改写成如下形式:

$$\begin{aligned}\Lambda\sigma &= \varepsilon(\mathbf{u}), \quad 在\ \Omega, &(4.1)\\ -\nabla\cdot\sigma &= \mathbf{f}, \quad 在\ \Omega, &(4.2)\\ \mathbf{u} &= \widehat{\mathbf{u}}, \quad 在\ \Gamma_D, &(4.3)\\ \sigma\mathbf{n} &= \widehat{\mathbf{t}}, \quad 在\ \Gamma_N, &(4.4)\end{aligned}$$

其中 σ 为应力张量, ε 为应变张量, 算子 Λ 的定义为:

$$\begin{aligned}\Lambda\sigma &= \frac{1}{2\mu}\left(\sigma-\frac{\lambda}{2\mu+d\lambda}\mathrm{tr}(\sigma)\mathrm{I}\right), &(4.5)\\ \varepsilon(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\nabla\mathbf{u}^T). &(4.6)\end{aligned}$$

记 $\mathbb{S}$ 为 $d\times d$ 对称矩阵的集合. 定义

$$H(\mathrm{div},\Omega;\mathbb{S})=\{\tau\in[L^2(\Omega)]^{d\times d}:\ \nabla\cdot\tau\in[L^2(\Omega)]^d,\tau^T=\tau\}.$$

问题 (4.1)–(4.3) 的一个弱形式为: 求 $\sigma\in H(\mathrm{div},\Omega;\mathbb{S})$, $\mathbf{u}\in[L^2(\Omega)]^d$ 满足

$$\begin{aligned}(\Lambda\sigma,\tau)+(\nabla\cdot\tau,\mathbf{u})-\langle\tau\mathbf{n},\mathbf{u}\rangle_{\Gamma_N}&=\langle\tau\mathbf{n},\widehat{\mathbf{u}}\rangle_{\Gamma_D},\quad \forall\tau\in H(\mathrm{div},\Omega;\mathbb{S}),\\ (\nabla\cdot\sigma,\mathbf{v})-\langle\sigma\mathbf{n},\mathbf{v}\rangle_{\Gamma_N}&=(-\mathbf{f},\mathbf{v})-\langle\widehat{\mathbf{t}},\mathbf{v}\rangle_{\Gamma_n},\quad \forall\mathbf{v}\in[L^2(\Omega)]^d.\end{aligned}\qquad (4.7)$$

这个问题是适定的 [4]. 下面介绍两种求解混合形式线弹性问题的 WG 数值格式.

4.1. 混合格式 1

定义弱函数空间

$$\begin{aligned}\Sigma_h&=\{\sigma_h\in[L^2(\Omega)]^{d\times d}:\ \sigma_h|_T\in[P_k(T)]^{d\times d},\sigma_h=\sigma_h^T,\forall T\in\mathcal{T}_h\},\\ V_{h,0}(T)&=[P_{k+1}(T)]^d,\forall T\in\mathcal{T}_h,\\ V_{h,b}(e)&=[P_k(e)]^d,\forall e\in\mathcal{E}_h,\end{aligned}$$

WG 数值格式定义为:

数值格式 3. [17] 求 $\sigma_h \in \Sigma_h, \mathbf{u}_h \in V_h$, 满足

$$
\begin{aligned}
a_3^g(\sigma_h,\tau_h)-b_3^g(\tau_h,\mathbf{u}_h) &= 0, \quad \forall\tau_h \in \Sigma_h, &(4.8)\\
b_3^g(\sigma_h,\mathbf{v}_h)+s_3^g(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h) &= (\mathbf{f},\mathbf{v}_h)+\langle\widehat{\mathbf{t}},\mathbf{v}_h\rangle_{\Gamma_N}, \quad \forall\mathbf{v}_h \in V_h, &(4.9)
\end{aligned}
$$

其中:

$$
\begin{aligned}
a_3^g(\sigma_h,\tau_h) &= (\Lambda\sigma_h,\tau_h),\\
b_3^g(\tau_h,\mathbf{u}_h) &= (\tau_h,\nabla_w\mathbf{u}_h),\\
s_3^g(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h) &= \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T\langle Q_{h,b}\mathbf{u}_0-\mathbf{u}_b, Q_{h,b}\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_b\rangle_{\partial T}.
\end{aligned}
$$

4.2. 混合格式 2

对 $\mathcal{E}_h$ 空间中的每条边任意取定一个单位外法向量组成一个新的空间, 记为

$$\mathcal{N}_h=\{\mathbf{n}_e:\ \mathbf{n}_e \text{ 为 } e \text{ 的一个单位法向量}, e\in\mathcal{E}_h\}.$$

定义弱函数空间

$$
\begin{aligned}
\Sigma_h =&\{\sigma_h=\{\sigma_0,\sigma_{\mathbf{n}}=\sigma_b\mathbf{n}_e^t\}:\ \sigma_0|_T\in[P_{k-1}(T)]^{d\times d},\sigma_0=\sigma_0^T,\forall T\in\mathcal{T}_h,\mathbf{n}_e\in\mathcal{N}_h,\\
&\quad \sigma_b|_e\in V_{k-1}(e),\forall e\subset\mathcal{E}_h\},\\
V_h =&\{\mathbf{v}_h:\ \mathbf{v}_h|_T\in[P_k(T)]^d,\forall T\in\mathcal{T}_h\},
\end{aligned}
$$

其中 $k\geq 1$, $\sigma_b\mathbf{n}_e^t$ 是矩阵.

定义空间 Σ_h 上的离散弱散度为

$$
\begin{aligned}
(\nabla_w\cdot\sigma_h)|_T &= \nabla_{w,T}\cdot(\sigma_h|_T), \quad \sigma_h\in\Sigma_h,\\
(\nabla_{w,T}\cdot\sigma_h,\mathbf{v}_h)_T &= -(\sigma_0,\nabla\mathbf{v}_h)_T+\langle\sigma_{\mathbf{n}}\mathbf{n},\mathbf{v}_h\rangle_{\partial T}, \quad \forall\mathbf{v}_h\in[P_k(T)]^d.
\end{aligned}
$$

由空间 V_h 的定义可知 $\nabla_w\cdot\sigma_h\in V_h$.

定义如下双线性形式

$$
\begin{aligned}
s_3^d(\sigma_h,\tau_h) &= \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T\langle\sigma_0\mathbf{n}-\sigma_{\mathbf{n}}\mathbf{n},\tau_0\mathbf{n}-\tau_{\mathbf{n}}\mathbf{n}\rangle_{\partial T}, \quad \sigma_h,\tau_h\in\Sigma_h,\\
a_3^d(\sigma_h,\tau_h) &= (\Lambda\sigma_0,\tau_0)+s_3^d(\sigma_h,\tau_h), \quad \sigma_h,\tau_h\in\Sigma_h,\\
b_3^d(\sigma_h,\mathbf{v}_h) &= (\nabla_w\cdot\sigma_h,\mathbf{v}_h)-\langle\sigma_{\mathbf{n}}\mathbf{n},\mathbf{v}_h\rangle_{\Gamma_N}, \quad \sigma_h\in\Sigma_h,\mathbf{v}_h\in V_h.
\end{aligned}
$$

注意有 $\sigma_{\mathbf{n}}\mathbf{n}=\mathrm{sgn}(\mathbf{n}_e\cdot\mathbf{n})\sigma_b$, 其中 $\mathbf{n}$ 是 $e\subset\partial T$ 的单位外法向量而 $\mathbf{n}_e\in\mathcal{N}_h$.

数值格式 4. [64] 求 $\sigma_h \in \Sigma_h, \mathbf{u}_h \in V_h$, 满足

$$
\begin{aligned}
a_3^d(\sigma_h,\tau_h)+b_3^d(\tau_h,\mathbf{u}_h) &= \langle\tau_{\mathbf{n}}\mathbf{n},\widehat{\mathbf{u}}\rangle_{\Gamma_D}, \quad \forall\tau_h\in\Sigma_h, &(4.10)\\
b_3^d(\sigma_h,\mathbf{v}_h) &= (-\mathbf{f},\mathbf{v}_h)-\langle\widehat{\mathbf{t}},\mathbf{v}_h\rangle_{\Gamma_N}, \quad \forall\mathbf{v}_h\in V_{h,3}. &(4.11)
\end{aligned}
$$

对于混合格式线弹性问题的两种 WG 数值格式, 其中数值格式 3 使用弱函数近似位移变量, 更加接近于原始形式线弹性问题 (1.1)–(1.3), 而数值格式 4 对应力张量使用弱函数近似则是从混合形式问题本身出发设计的数值格式, 两种格式虽然各有特点, 但是都可以到达最优阶收敛, 且应变张量都自然满足对称性要求.

5. 总结与展望

本文回顾了 WG 方法求解线弹性问题的一系列工作, 介绍了使用 WG 方法解决线弹性问题数值求解过程中常见的三个问题:

1. 由于位移的应变算子的定义, 线弹性方程变分形式的强制性不易满足. 对于 Dirichlet 边值问题, 我们可以考虑其梯度 - 散度数值格式从而得到其强制性. 对于混合边值条件问题, 本文介绍了使用第二 Kron 不等式证明对于空间 $V_{h,D}^0$ 中的元素 $\mathbf{v}$, 算子

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\left(\|\varepsilon_w(\mathbf{v})\|_T^2+h_T^{-1}\|Q_{h,b}\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_b\|_{\partial T}^2\right)$$

   为一个范数.

2. 使用传统有限元方法求解线弹性问题时, 数值解与真解之间的误差往往依赖于参数 λ, 当其趋于无穷时数值解不收敛. 本文介绍了两种证明格式 “无闭锁” 的方法. 其一是使用线弹性问题的正则性条件 (3.1). 其二是在数值格式中引入新变量. 值得指出的是数值格式 1 的构造采用传统 WG 数值格式构造的一般规则, 即在有限元数值格式的基础上使用弱函数, 采用弱微分算子, 引入稳定子. 除去弱函数的边界元采用线弹性问题常用的 RM 元这一处理之外并没有做其他特别处理, 这体现了 WG 方法适用性广、便于构造的优点.

3. 对于混合形式线弹性问题, 由于牛顿第三定理的限制, 应变张量 σ 为对称矩阵, 这使得相应的近似函数空间构造困难. 本文介绍了两种满足应变张量对称性的稳定的 WG 数值格式. 其数值格式的给出仍延续传统 WG 方法的一般规则, 构造相对简单. 这也体现了 WG 方法适用性广的优点.

相比于传统有限元方法, WG 方法不要求近似函数连续, 从而放松了对近似函数空间构造的要求. 同时 WG 方法使用弱微分算子搭配稳定子来描述近似函数在单元之间的连续性. 这些特点使 WG 方法具有适用性广、易于构造的优点. 但是, 弱函数的引入也使得 WG 方法具有较高的自由度, 给计算带来困难. 为了解决这一问题, 可以考虑使用杂交弱有限元法, 修正弱有限元法等方法对 WG 方法进行优化. 对于混合形式线弹性方程的 WG 数值格式 4, 文献 [63] 使用杂交方法对其进行了优化, 从而将单元内部的自由度消去, 提高了计算效率. 由于篇幅问题我们不在这里进行详细叙述.

对于弹性问题的 WG 方法, 仍存在许多需要解决的问题. 如

- 线弹性问题 WG 方法的快速算法, 如区域分解、多重网格和预条件子等;
- 线弹性问题 WG 方法相应的自适应收敛性分析;
- 非线性弹性问题 WG 方法的构造与研究.

参 考 文 献

[1] M. Amara and J. M. Thomas, Equilibrium finite elements for the linear elastic problem[J], Numer. Math., 33 (1979), 367–383.

[2] D.N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L.D. Marini, Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems[J], SIAM J. Numer. Anal., 39 (2002), 1749–1779.

[3] D. N. Arnold, F. Brezzi, and J. Douglas, PEERS, a new mixed finite element for plane elasticity[J], Japan J. Appl. Math., 1 (1984), 347–367.

[4] D. N. Arnold and R. S. Falk, Well-posedness of the fundamental boundary value problems for constained anisotropic elastic materials[J]. Arch. Rational Mech. Anal., 98 (1987), 143–165.

[5] D. N. Arnold and R. Winther, Nonconforming mixed elements for elasticity, Dedicated to Jim Douglas, Jr. on the occasion of his 75th birthday[J]. Math. Models Methods Appl. Sci., 13 (2003), 295–307.

[6] I. Babuška and M. Suri, Locking effects in the finite element approximation of elasticity problems[J]. Numer. Math., 62 (1992), 439–463.

[7] G. Bao, Y. Cao, Y. Hao, and K. Zhang, A robust numerical method for the random interface grating problem via shape calculus, weak Galerkin method, and low-rank approximation[J]. J. Sci. Comp., (2018), 1–24.

[8] V. L. Beirão da, F. Brezzi, A. Cangiani, L. D. Marini, and A. Russo, Basic principles of virtual element methods[J]. Math. Models Methods Appl. Sci., 23(1) (2013), 199–214.

[9] V. L. Beirão da, F. Brezzi, and L. D. Marini, Virtual elements for linear elasticity problems[J]. SIAM J. Numer. Anal., 51 (2013), 794–812.

[10] S. C. Brenner, Korn's inequalities for piecewise H^1 vector fields[J]. Math. Comp., 73 (2003), 1067–1087.

[11] S. C. Brenner and L. Y. Sung, Linear finite element methods for planar linear elasticity[J]. Math. Comp., 59 (1992), 321–338.

[12] F. Brezzi, On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers[J]. Rev. Francaise Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér., 8 (1974), 129–151.

[13] F. Brezzi and M. Fortin, Mixed and Hybrid Finite Element Methods[M]. Springer-Verlag, New York, 1991.

[14] F. Brezzi, K. Lipnikov, and M. Shashkov, Convergence of the mimetic finite difference method for diffusion problems on polyhedral meshes[J]. SIAM J. Numer. Anal., 43(5) (2005), 1872–1896.

[15] Z. Cai, T. A. Manteuffel, and S. F. McCormick, First-order system least squares for the Stokes equations, with application to linear elasticity[J]. SIAM J. Numer. Anal., 34 (1997), 1727–1741.

[16] G. Chen, M. Feng, and X. Xie, Robust globally divergence-free weak Galerkin methods for Stokes equations[J]. J. Comput. Math., 34 (2016), 549–572.

[17] G. Chen and X. Xie, A robust weak Galerkin finite element method for linear elasticity with strong symmeric stresses[J]. Comput. Methods Appl. Math., 16 (2016), 389–408.

[18] L. Chen, J. Wang, Y. Wang, and X. Ye, An auxiliary space multigrid preconditioner for the weak Galerkin method[J]. Comput. Math. Appl., 70(4) (2015), 330–344.

[19] B. Cockburn, J. Gopalakrishnan, N.C. Nguyen, J. Peraire, and F. Sayas, Analysis of HDG methods for Stokes flow[J]. Math. Comput., 80(274) (2011), 723–760.

[20] Q. Guan, M. Gunzburger, and W. Zhao, Weak Galerkin finite element methods for a second-order

elliptic variational inequality[J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 337 (2018), 677–688.

[21] Y. Han, H. Li, and X. Xie, Robust globally divergence-free weak Galerkin finite element methods for unsteady natural convection problems[J]. Numer. Math. Theory Methods Appl., 12(4) (2019), 1266–1308.

[22] P. Hansbo and M. G. Larson, Discontinuous Galerkin methods for incompressible and nearly incompressible elasticity by Nitsche's methods[J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 191(17–18), (2002), 1895–1908.

[23] G. Harper, J. Liu, S. Tavener, and B. Zheng, Lowest-Order weak Galerkin finite element methods for linear elasticity on rectangular and brick meshes[J]. J. Sci. Comp., 78(1917–1941), (2019), 1895–1908.

[24] J. Hu, A new family of efficient conforming mixed finite elements on both rectangular and cuboid meshes for linear elasticity in the symmetric formulation[J]. SIAM J. Numer. Anal., 53(3) (2015), 1438–1463.

[25] J. Hu, Finite element approximations of symmetric tensors on simplicial grids in Rn: the higher order case[J]. J. Comput. Math., 33(2) (2015), 283–296.

[26] J. Hu and S. Zhang, A family of symmetric mixed finite elements for linear elasticity on tetrahedral grids[J]. Sci. China Math., 58(2) (2015), 297–307.

[27] J. Hu and S. Zhang, Finite element approximations of symmetric tensors on simplicial grids in Rn: the lower order case[J]. Math. Models Methods Appl. Sci., 26(9) (2016), 1649–1669.

[28] X. Hu, L. Mu, and X. Ye, A weak Galerkin finite element method for the Navier-Stokes equations[J]. J. Comput. Appl. Math., 362 (2019), 614–625.

[29] Y. Huang, J. Li, and D. Li, Developing weak Galerkin finite element methods for the wave equation[J]. Numer. Methods Partial Differential Equations, 33(3) (2017), 868–884.

[30] A. Klawonn and O. B. Widlund, Dual-primal FETI methods for linear elasticity[J]. Comm. Pure Appl. Math., 59 (2006), 1523–1572.

[31] C. O. Lee, J. Lee, and D. Sheen, A locking-free nonconforming finite element method for planar linear elasticity[J]. Challenges in computational mathematics (Pohang, 2001). Adv. Comput. Math., 19 (2003), 277–291.

[32] R. J. LeVeque, Finite-volume methods for non-linear elasticity in heterogeneous media[J]. ICFD Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamics (Oxford, 2001). Internat. J. Numer. Methods Fluids, 40 (2002), 93–104.

[33] B. Li and X. Xie, A two-level algorithm for the weak Galerkin discretization of diffusion problems[J]. J. Comput. Appl. Math., 287 (2015), 179–195

[34] B. Li, X. Xie, and S. Zhang, BPS preconditioners for a weak Galerkin finite element method for 2D diffusion problems with strongly discontinuous coefficients[J]. Comp. Math. Appl., 76(4) (2018), 701–724.

[35] G. Li, Y. Chen, and Y. Huang, A new weak Galerkin finite element scheme for general second-order elliptic problems[J]. J. Comput. Appl. Math., 344 (2018), 701–715.

[36] H. Li, L. Mu, and X. Ye, A posteriori error estimates for the weak Galerkin finite element methods on polytopal meshes[J]. Commun. Comput. Phys., 26(2) (2019), 558–578.

[37] J. Liu, S. Tavener, and Z. Wang, Lowest-order weak Galerkin finite element method for Darcy flow on convex polygonal meshes[J]. SIAM J. Sci. Comput., 40(5) (2018), B1229–B1252.

[38] X. Liu, J. Li, and Z. Chen, A weak Galerkin finite element method for the Navier-Stokes equations[J]. J. Comput. Appl. Math., 333 (2018), 442–457.

[39] Y. Liu and J. Wang, Simplified weak Galerkin and new finite difference schemes for the Stokes equation[J]. J. Comput. Appl. Math., 361 (2019), 176–206.

[40] L. Mu, A priori and a posterior error estimate of new weak Galerkin finite element methods for second order elliptic interface problems on polygonal meshes[J]. J. Comput. Appl. Math., 362 (2019), 423–442.

[41] L. Mu, J. Wang, and X. Ye, A stable numerical algorithm for the Brinkman equations by weak Galerkin finite element methods[J]. J. Comput. Phys., 273 (2014), 327–342.

[42] L. Mu, J. Wang, and X. Ye, Weak Galerkin finite element methods on polytopal meshes[J]. Int. J. Numer. Anal. Model., 12 (2015), 31–53.

[43] L. Mu, J. Wang, and X. Ye, A least-squares-based weak Galerkinfinite element method for second order elliptic equations[J]. SIAM J. Sci. Comput., 39(4) (2017), A1531–A1557.

[44] L. Mu, J. Wang, X. Ye, and S. Zhang, A C^0-weak Galerkin finite element method for the biharmonic equation[J]. J. Sci. Comput., 59 (2014), 473–495.

[45] L. Mu and X. Zhang, An immersed weak Galerkin method for elliptic interface problems[J]. J. Comput. Appl. Math., 362 (2019), 471–483.

[46] J. A. Nitsche, On Korn's second inequality[J]. RAIRO, Analyse Numerique, 15 (1981), 237–248.

[47] H. Peng, X. Wang, Q. Zhai, and R. Zhang, A weak Galerkin finite element method for the elliptic variational inequality[J]. Numer. Math. Theory Methods Appl., 12(3) (2019), 923–941.

[48] H. X. Rui and M. Sun, A locking-free finite difference method on staggered grids for linear elasticity problems[J]. Comput. Math. Appl., 76 (2018), 1301–1320.

[49] W. Shao, S. Sun, and Y. Wang, An economical cascadic multigrid method for the weak Galerkin finite element approximation of second order elliptic problems[J]. J. Comput. Appl. Math., 362 (2019), 341–353.

[50] S. C. Soon, B. Cockburn, and H. K. Stolarski, A hybridizable discontinuous Galerkin method for linear elasticity[J]. Internat. J. Numer. Methods Engrg., 80 (2009), 1058–1092.

[51] M. Sun and H. Rui, A coupling of weak Galerkin and mixed finite element methods for poroelasticity[J]., Comput. Math. Appl., 73(5) (2017), 804–823.

[52] J. Sun, Q. Zhang, and Z. Zhang, A curl-conforming weak Galerkin method for the quad-curl problem, BIT, 59(4) (2019), 1093–1114.

[53] M. Vogelius, An analysis of the p-version of the finite element method for nearly incompressible materials, Numerische Mathematik, 41 (1983), 39–53.

[54] C. Wang and J. Wang, Primal-dual weak Galerkin finite element methods for elliptic Cauchy problems, Comput. Math. Appl., 79(3) (2020), 746–763.

[55] C. Wang, J. Wang, R. Wang, and R. Zhang, A locking-free weak Galerkin finite element method for elasticity problems in the primal formulation, J. Comput. Appl. Math., 307 (2016), 346–366.

[56] J. Wang, R. Wang, Q. Zhai, and R. Zhang, A systematic study on weak Galerkin finite element methods for second order elliptic problems, J. Sci. Comput., 74 (2018), 1369–1396.

[57] J. Wang and X. Ye A weak Galerkin finite element method for second-order elliptic problems[J]. J. Comput. Appl. Math., 241 (2013), 103–115.

[58] J. Wang and X. Ye A weak Galerkin mixed finite element method for second order elliptic problems[J]. Math. Comp., 83 (2014), 2101–2126.

[59] J. Wang and X. Ye, A weak Galerkin finite element method for the stokes equations[J]. Adv. Comput. Math., 42 (2016), 155–174.

[60] J. Wang, X. Ye, Q. Zhai, and R. Zhang, Discrete maximum principle for the P_1-P_0 weak Galerkin

finite element approximations[J]. J. Comput. Phys., 362 (2018), 114–130.

[61] J. Wang, Q. Zhai, R. Zhang, and S. Zhang, A weak Galerkin finite element scheme for the Cahn-Hilliard equation.[J]. Math. Comp., 88 (2019), 211–235.

[62] R. Wang, X. Wang, Q. Zhai, and R. Zhang, A weak Galerkin finite element scheme for solving the stationary Stokes equations[J]. J. Comput. Appl. Math., 302 (2016), 171–185.

[63] R. Wang, X. Wang, K. Zhang, and Q. Zhou, Hybridized weak Galerkin finite element method for the linear elasticity problem in mixed form[J]. Front. Math. China, 13 (2018), 1121–1140.

[64] R. Wang and R. Zhang, A weak Galerkin finite element method for the linear elasticity problem in mixed form[J]. J. Comp. Math., 36 (2018), 469–491.

[65] R. Wang, R. Zhang, X. Zhang, and Z. Zhang, Supercloseness analysis and polynomial preserving recovery for a class of weak Galerkin method[J]. Numer. Methods Partial Differential Equation, 34 (2018), 317–335.

[66] X. Wang, Q. Zhai, R. Wang, and R. Jari, An absolutely stable weak Galerkin finite element method for the Darcy-Stokes problem[J]. Appl. Math. Comput., 331 (2018), 20–32.

[67] X. Wang, Q. Zhai, and R. Zhang, The weak Galerkin method for solving the incompressible Brinkman flow[J]. J. Comput. Appl. Math., 307 (2016), 13–24.

[68] Z. Wang, G. Harper, P. O'Leary, J. Liu, and S. Tavener, Deal.II implementation of a weak Galerkin finite element solver for Darcy flow[J]. Computational science — ICCS, (2019), Part IV, 495–509.

[69] T. P. Wihler, Locking-free adaptive discontinuous Galerkin FEM for linear elasticity problems[J]. Math. Comp., 75 (2006), 1087–1102.

[70] S. Y. Yi, A lowest-order weak Galerkin method for linear elasticity[J]. J. Comput. Appl. Math., 350 (2019), 286-298.

[71] Q. Zhai, H. Xie, R. Zhang, and Z. Zhang, Acceleration of weak Galerkin methods for the Laplacian eigenvalue problem[J]. J. Sci. Comput., 79(2) (2019), 914–934.

[72] Q. Zhai, H. Xie, R. Zhang, and Z. Zhang, The weak Galerkin method for elliptic eigenvalue problems[J]. Commun. Comput. Phys., 26(1) (2019), 160–191.

[73] Q. Zhai and R. Zhang, Lower and upper bounds of Laplacian eigenvalue problem by weak Galerkin method on triangular meshes[J]. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, 24(1) (2019), 403–413.

[74] Q. Zhai, R. Zhang, and L. Mu, A new weak Galerkin finite element scheme for the Brinkman model[J]. Commun. Comput. Phys., 19 (2016), 1409–1434.

[75] J. Zhang, K. Zhang, J. Li, and X. Wang, A weak Galerkin finite element method for the Navier-Stokes equations[J]. Commun. Comput. Phys., 23(3) (2018), 706–746.

[76] L. Zhang, M. Feng, and J. Zhang, A modified weak Galerkin method for Stokes equations[J]. Adv. Appl. Math. Mech., 11(4) (2019), 890–910.

[77] R. Zhang and Q. Zhai, A weak Galerkin finite element scheme for the biharmonic equations by using polynomials of reduced order[J]. J. Sci. Comput., 64 (2015), 559–585.

[78] T. Zhang and Y.Chen, An analysis of the weak Galerkin finite element method for convection-diffusion equations[J]. Appl. Math. Comput., 346 (2019), 612–621.

[79] T. Zhang and T. Lin, The weak Galerkin finite element method for incompressible flow[J]. J. Math. Anal. Appl., 464(1) (2018), 247–265.

[80] T. Zhang and T. Lin, An analysis of a weak Galerkin finite element method for stationary Navier-Stokes problems[J]. J. Comput. Appl. Math., 362 (2019), 484–497.

[81] X. Zheng and X. Xie, A posteriori error estimator for a weak Galerkin finite element solution of the Stokes problem[J]. East Asian J. Appl. Math., 7(3) (2017), 508–529.

[82] J. Zhou, D. Xu, and H. Chen, A weak Galerkin finite element method for multi-term time-fractional diffusion equations[J]. East Asian J. Appl. Math., 8(1) (2018), 181–193.
[83] S. Zhou, F. Gao, B. Li, and Z. Sun, Weak Galerkin finite element method with second-order accuracy in time for parabolic problems[J]. Appl. Math. Lett., 90 (2019), 118–123.
[84] H. Zhu, Y. Zou, S. Chai, and C. Zhou, A weak Galerkin method with RT elements for a stochastic parabolic differential equation[J]. East Asian J. Appl. Math., 9(4) (2019), 818–830.

WEAK GALERKIN FINITE ELEMENT METHOD FOR LINEAR ELASTICITY PROBLEMS

Zhang Ran
(*School of Mathematics, Jilin University, ChangChun 130012, China*)

Abstract

This article considers the application of the weak Galerkin finite element (WG) method to linear elasticity problems. The WG method is a generalization of the traditional finite element method, which is used to solve numerical solutions of partial differential equations. In WG, the weak function, a piecewise polynomial function that is defined both inside the element and on the boundary of the element, is used as an approximate function and weak differential operators are given correspondingly. Moreover, stabilizers are introduced to keep the weak continuity of the approximate function. In the WG method, partitions could be arbitrary polygons or polyhedrons that satisfies the shape regular conditions. In addition the numerical format and the approximate function are easy to construct. In this paper, we introduce the application of the WG method in solving linear elasticity problems by solving three common problems in the numerical methods for linear elasticity problems, namely: the coerciveness, locking property, and the symmetry of stress tensor.

Keywords: weak Galerkin finite element method, linear elasticity problem, locking-free, mixed method

2010 Mathematics Subject Classification: 65D17, 65N30, 65N15