

# 论微分与积分方程以及有限与无限元\* 1)

冯 康

(中国科学院计算中心)

## 1

椭圆微分方程的边界值问题可以有种种不同的数学成型,在理论上等价,但在实践上不等效.有限元方法成功的一个关键就是合理选取了变分的数学型式.举例来说,取调和方程的第二类边界问题,定义于区域 $\Omega$ ,具有光滑边界 $\Gamma$ :

$$\Omega: \quad \Delta u = 0, \quad (1)$$

$$\Gamma: \quad \frac{\partial u}{\partial n} = f_0, \quad (2)$$

此处设 $f_0$ 属于 $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ,并满足相容性条件

$$\int_{\Gamma} f_0 ds = 0.$$

熟知这一问题等价于变分问题:

$$\text{求 } u \in H^1(\Omega) \text{ 使 } A(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad (3)$$

$$A(u, v) = \int_{\Omega} (u_x v_x + u_y v_y) dx dy, \quad F(v) = \int_{\Gamma} f_0 v ds. \quad (4)$$

这一问题也还可以通过积分方程的型式来表达.最熟悉的第二类 Fredholm 积分方程,基于单极子及偶极子层的位势的间断性而得到

$$f_0(p) = \pi w(p) + \int_{\Gamma} w(p') \frac{\partial}{\partial n_p} \ln \frac{1}{R(p, p')} dp', \quad p \in \Gamma, \quad (5)$$

这里 $R(p, p')$ 为点 $p$ 与 $p'$ 的距离.由此方程求解 $w$ ,然后用显式积分公式

$$u(p) = \int_{\Gamma} w(p') \ln \frac{1}{R(p, p')} dp', \quad p \in \Omega \quad (6)$$

得出原始问题的解 $u$ .还有其它的等价的积分方程的型式.一般说来,定型为积分方程的好处是降低了维数,而且还能将无限域化为有限;其代价则是增加了解析上的困难.

## 2

我们来讨论一种普遍而自然的转化为积分方程的方式,对此在文献中讨论是较少的.

\* 1979年4月17日收到.

1) 本文是作者应法国国家科学研究中心 (Centre National de la Recherche Scientifique) 及意大利国家科学院 (Accademia Nazionale dei Lincei) 邀请于1978年10-11月赴法、意讲学稿的一部分.

取调和方程在区域  $\Omega$  上的第一类格林函数

$$\begin{aligned} G(p, p') &= G(p', p), \\ -\Delta_p G(p, p') &= \delta(p - p'), \\ G(p, p')|_{p \in \Gamma} &= 0. \end{aligned}$$

于是, 对于调和方程的任一解  $u$ , 必有

$$u(p) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n'} G(p, p') \cdot u_0(p') dp', \quad p \in \Omega, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u(p)}{\partial n} = - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2}{\partial n \partial n'} G(p, p') \cdot u_0(p') dp', \quad p \in \Gamma, \quad (8)$$

这里  $u_0$  表示调和方程的解  $u$  的边界值. (7) 表示边界值与内点值的积分关系, (8) 表示边界值与边界法向导数值的积分关系.

命

$$\begin{aligned} K(p, p') &= - \frac{\partial^2}{\partial n \partial n'} G(p, p') = K(p', p), \\ H(p, p') &= - \frac{\partial}{\partial n'} G(p, p'). \end{aligned}$$

考虑到边界条件(2), 由(8)即得积分方程 (Hadamard):

$$\int_{\Gamma} K(p, p') u_0(p') dp' = f_0(p), \quad p \in \Gamma. \quad (9)$$

其特定的解  $u_0$  就是原始问题解的边界值, 更由(7)得显式积分公式

$$u(p) = \int_{\Gamma} H(p, p') u_0(p') dp', \quad p \in \Omega, \quad (10)$$

从而得原始问题解的内点值.

这一积分方程(9)又等价于变分问题:

$$\text{求 } u_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ 使 } A_0(u_0, v_0) = F_0(v_0), \quad \forall v_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad (11)$$

$$A_0(u_0, v_0) = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} K(p, p') u_0(p) v_0(p') dp dp', \quad F_0(v_0) = \int_{\Gamma} f_0 v_0 ds. \quad (12)$$

不难验证, 对于调和方程的任意解  $u, v$ , 恒有

$$A_0(u_0, v_0) = A(u, v), \quad F_0(v_0) = F(v). \quad (13)$$

应该指出, Fredholm 积分方程(5)不是自伴的, 而对应的算子映照

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

但是在积分方程(9), 算子则是自伴椭圆型的, 并且映照  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . 这里的积分核  $K(p, p')$  是不可积的, 是 Hadamard 意义下的发散积分的有限部分, 是如  $1/x^2$  这样的发散类型, 因此映照  $H^s \rightarrow H^{s-1}$ , 光滑阶数降 1. 核函数的这种高度奇异性带来了解析上的困难, 这也许是这种形式的积分方程常被忽视的原因. 但是, 这种奇异性带来的光滑降阶与其说是缺点还不如说是优点, 因为它导致解的较高的稳定性. 此外, 按照这一方式转化为积分方程后, 保持了原始问题的自伴椭圆正定性, 而且由(13)可知, 对应的变分问题中的泛函值经过转化后保持不变. 因此这一种由椭圆方程向 Hadamard 积分方程的转化是比较自然而直接的, 是有多方面的优点的, 是值得重用的, 我们将称之为正则转化.

设问题(1—2)的区域  $\Omega$  为单位圆, 则正则转化后的积分方程(9—10)成为

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1, \theta) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(1, \theta')}{\sin^2 \frac{\theta' - \theta}{2}} d\theta', \quad (14)$$

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)u(1, \theta')}{1+r^2-2r \cos(\theta-\theta')} d\theta', \quad 0 \leq r < 1. \quad (15)$$

设  $\Omega$  为上半平面, 则有

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x', 0)}{(x' - x)^2} dx', \quad (16)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yu(x', 0)}{(x' - x)^2 + y^2} dx', \quad y \geq 0. \quad (17)$$

注意 (16) 中的积分核是标准的有限部分  $1/x^2$ , 而其周期性对等物  $1/\sin^2\theta$  就是 (14) 中的积分核. (15), (17) 分别是熟知的 Poisson 及 Schwarz 积分公式.

### 3

在正则转化中, 有关的格林函数尽管在理论上是存在的, 但在多数情况下却是不容易得到的或是不容易处理的. 这种解析上的困难是可以克服的, 也就是说, 可以绕过的. 事实上, 在应用有限元方法来解椭圆型边值问题的实践中, 这种正则转化是常常隐含地而不自觉被运用, 这就是所谓子结构的技巧. 例如, 取 (1-2) 的有限元模型, 命  $u_0$  及  $u$  分别表示边界节点及内部节点的函数值矢量, 有限元方程一般作如下的形式:

$$Bu_0 + Cu = f_0,$$

$$C^T u_0 + Au = 0.$$

从第二组解出  $u = -A^{-1}C^T u_0$ , 代入第一组. 命

$$G = A^{-1}, \quad H = -GC^T, \quad K = B + CH,$$

于是  $K = K^T$  并为正定, 同时得到

$$Ku_0 = f_0, \quad (18)$$

$$u = Hu_0, \quad (19)$$

与 (9, 10) 完全相似. 事实上, 内点  $u_0$  部分的刚度矩阵块  $A$  的逆阵  $A^{-1} = G$  就是第一类格林函数的模拟, 但它是无须通过格林函数的解析表达式而是直接可从有限元模型中得到的. 因此, 消去内部节点 (视为一个子结构) 矢量  $u$ , 即通过边界节点矢量  $u_0$  来表达内点矢量  $u$  的消元过程本质上就是正则转化的过程. 应该指出, 有限元的一个特点或优点在于它是按照几何的原则来进行离散化的, 边界与内部的分野在离散化后仍然有意义而且得到保持, 从而使得正则转化在有限元范畴内有其自然的反映. 这既能说明有限元法的上述特点是一个重大的优点, 同时也能说明在由椭圆方程向积分方程的种种转化形式中正则转化尤其重要. 看来正则转化对具有巨大的复杂性的问题特别有用, 例如对于组合流形上的椭圆方程以及组合弹性结构以及包含了对无限区域的偶合的问题等, 见 [1], [8, 9]. 它将把一组偶合的椭圆方程转化为低维骨架上的偶合的积分方程. 或者仅在部分区域上实行转化而得到偶合的微分方程及积分方程, 包括所谓带积分边界条件的微分方程, 见 [2].

## 4

近年来提出了一种巧妙的无限相似剖分的格式。最早是 Silvester-Cermak<sup>[3]</sup> 在差分方法的范畴内提出的,为的是处理即切掉无穷域的问题,但没有得到进一步发展和理论上的讨论。在有限元方法的范畴内,是由 Thatcher<sup>[4]</sup> 及应隆安-郭仲衡<sup>[5]</sup>各自独立地提出并作了理论讨论。虽然最初是针对断裂奇点问题,但对于凹角、多个内界面的交点(见 [6]),无限域以及通常的无奇点的有界封闭域都可应用。这一方法在于作无限的相似形单元剖分,逐次缩小而收敛于奇点,或逐次放大而发散于无穷。由于方程组有相似性,虽有无穷多个未知数,却是可解的,无穷多个内点分量可以通过有限多个边界分量来消去。这实质上也是一种不明显使用格林函数的正则转化。

作者证明了<sup>[7]</sup>,对于(a)回绕裂缝尖点,(b)围绕凹角,(c)围绕多个内界面的交点,(d)围绕着封闭的或角状的无穷域,(e)围绕有界的凸的解为正则的区域等五种情况运用无限相似剖分的有限元时,在一定的均匀性条件(即每个单元的直径与其最大内接圆的直径之比保持一致有上界)下,方法是收敛的而且保持该有限元的名义精度。这就是说,如果某有限元对于充分光滑的解具有  $O(h^m)$  阶精度,则当作无限相似剖分时,当剖分的最大网距  $h \rightarrow 0$  时,离散解以同样的  $O(h^m)$  收敛于真解。

对于调和方程以及用通常的线性一次有限元,对上面提到的(a),(b),(d),(e)四种情况,可以用显式算出,解在奇点邻近的奇异性指数或者解在无穷域的衰减指数(即真解展开式中幂次  $r^{m_1}, r^{m_2}, \dots, r^{m_j}, \dots$  的指数  $m_1, m_2, \dots, m_j, \dots$ , (见 [6])) 与用无限相似剖分的离散模型中所得相应的指数  $m'_1, m'_2, \dots, m'_j, \dots$  之差为  $O(j^3 h^2)$ 。

由于通常的有限元的精度在上述(a),(b),(c),(d)四种情况下会受到严重损伤,而这些情况在实践中是经常出现的,即实际上达不到它的名义精度。因此,无限相似剖分的技术在一定意义下恢复了精度,它是与现在有限元技术相容的,并且很容易实现。

## 5

不妨举两个例子来说明。第一个例子是,比方说,一个二维坝体,它与半无穷弹性地基相耦合,并在不同部位有奇异性的应力集中以及正规的部段,见图 1,其中虚线表示不同介质的内界面,可以将这一结构粗分为五块(子结构),每块具有上面列举过的特定性态如(a),(b),(c),(d),(e)。进一步的细分实际上只是在块间的一维边界线上进行,每块的无限相似剖分只是理论上说的,它们在正则转化过程中被消去。因此,可以设想,这样的作法将对解题的准备、计算量和存贮量带来很大的节约。

第二个例子是单位圆上的奇异积分方程(14)的离散化,其积分核就是标准的发散积分的“有限部分”  $1/x^2$  的周期性对等物  $1/\sin^2\theta$ , 因此问题就成为“有限部分”的离散化问题。为此,我们回到与(14)等价的单位圆内的调和方程第二类边值问题,对此采用弧状四边形双线性有限元以及无限的相似剖分,如图 2。无穷多内点自由度的消元实现了正则转化,即得到上述奇异积分方程的有限元模拟。根据无限相似剖分法,对于该二维调和

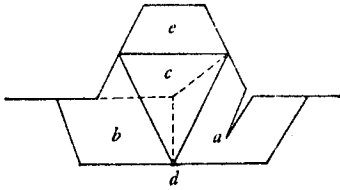


图 1

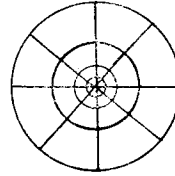


图 2

方程解的收敛性, 以及根据调和方程的解相对于定解数据的先验估计和边界痕迹嵌入定理, 可以证明这个积分方程的有限元解按  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  的范数收敛于积分方程的真解, 其精度为  $O(h)$ . 这可以说是没有写下积分方程而求解积分方程的一个例子, 也是没有写下“有限部分”而处理“有限部分”的一个例子.

## 参 考 文 献

- [1] 冯康, 组合流型上的椭圆方程与组合弹性结构, 计算数学, 1: 3 (1979), 199—208.
- [2] G. Birkhoff, Albedo functions for elliptic equations, in Boundary Problems in Differential Equations, ed. R. Langer, Madison, 1960.
- [3] Silvester, Cermak, IEEE Trans. MTT, 1968.
- [4] Thatcher, Num. Math., 1975.
- [5] 应隆安, 郭仲衡, Acta Scientia Sinica, 1976.
- [6] Strang, Fix, An Analysis of the Finite Element Method, N. Y., 1973.
- [7] 冯康, 论椭圆方程到积分方程的正则转化与有限元方法, 待发表.
- [8] 冯康, 论组合弹性结构的数学基础, 待发表.
- [9] 冯康, 石钟慈, 弹性结构的数学理论, 将由科学出版社出版.

## DIFFERENTIAL VERSUS INTEGRAL EQUATIONS AND FINITE VERSUS INFINITE ELEMENTS

Feng Kang

(Computing Center, Academia Sinica)

### Abstract

Boundary-value problems of elliptic equations may have many different mathematical formulations, equivalent in principle but not equally efficient in practice. For example, Neumann problem of Laplace equations (1), (2) is equivalent to the variational problem (3), (4). The judicious use of the latter formulation leads to the success of the FEM. The problem can also be formulated in terms of integral equations, even in many ways. They have generally the advantage of the reduction both of dimension by 1 and of the infinite domain to the finite, at the expense of increased analytical difficulty. The most well-known reduction is the Fredholm integral equation of the second kind (5), for which  $w$  is to be solved and gives the original solution through the integral formula (6). The corresponding integral operator maps  $H^s(\partial\Omega) \rightarrow H^s(\partial\Omega)$  and is, in general, not self-adjoint, so one of the characteristic and useful properties of the original problem is lost.

A less-known reduction to integral equation is in the form (7), for which the boundary value  $u_0$  of the solution  $u$  to the original problem is to be solved and gives  $u$  through the integral formula (8). The kernel  $K$  has the advantage of being self-adjoint and is derived from the Green's function by double differentiation so is highly singular. It is of the type of the finite part of the divergent integral in the sense of Hadamard and maps  $H^r$  onto  $H^{r-1}$  and is thus desmoothing by order 1. This is advantageous rather than defective to the solution stability. Furthermore, the variational formulation equivalent to (7) is (11), (12) which can be obtained from (3), (4) through elimination of interior values of  $u$  by means of Green's function. This form of reduction to integral equation is related to the original problem in a more natural and direct way, so it will be regarded as canonical and is more desirable in numerical approach. In fact, the idea of canonical reduction is implicitly used in FEM practice as technique of substructures. The elimination of the internal degrees of freedom is precisely a discrete analog of the canonical reduction and the resulted algebraic system containing solely the boundary degrees of freedom is precisely a discrete analog of the Hadamard integral equation.

Recently, an elegant scheme of infinite similar elements has been proposed for the solution of crack singularity problems. They are equally well suited for concave corners, intersection of several interfaces, infinite domains and also the usual closed domain of regularity. For all these cases, it can be shown that, under certain uniformity condition, a conforming finite element in infinite similar triangulation converges with its nominal order of accuracy without deterioration. This elimination of infinite number of the interior degrees of freedom is another example of discrete analog of the canonical reduction.

Fig. 1 affords an example problem containing various kinds of singularity and infinite domain. It can be grossly divided into 5 substructures using infinite triangulation for each. This suggests an economy of problem preparation, storage space and volume of computation. Fig. 2 is an infinite triangulation of the unit circle, the finite algebraic system for the boundary unknowns after the elimination of infinite many interior unknowns gives a discrete analog of the Hadamard integral equation (14) with the finite part kernel  $1/\sin^2\theta$  for the unit circle. This is an example of solving integral equation without explicit use of integral equation, also that of treating finite parts without explicit presentation of finite parts.