关于调和方程自然积分算子的一个定理*1)

冯 康　余德浩
(中国科学院计算中心)

A THEOREM FOR THE NATURAL INTEGRAL OPERATOR OF HARMONIC EQUATION

Feng Kang　Yu De-hao
(*Computing Center, Academia Sinica*)

Abstract

In this paper an important theorem on the relationship between the boundary natural integral operator $\mathcal{K}$ of harmonic equation and the Laplace-Betrand operator $\triangle_\Gamma$ on boundary is given: $\mathcal{K}^2 = -\triangle_\Gamma$, which holds for arbitrary simply connected domain.

1. 引　　言

许多微分方程边值问题可以归化为边界上的积分方程，通过不同途径可得到相应于同一边值问题的不同的边界积分方程. 边界归化的途径很多. 由本文作者首创并发展的自然边界归化在这许多途径中有其特殊的地位，它完全不同于国际流行的其它边界归化方法而有许多独特的优点. 它保持了能量泛函不变量，从而与有限元方法能自然而直接地耦合. 与一般边界归化得到的边界积分方程也取决于归化途径及所选择的基本解不同，边界自然积分方程是由原边值问题唯一确定，即对同一边值问题只能得到同一个自然积分方程. 这一方程准确反映了此边值问题的互补的 Dirichlet 边值与 Neumann 边值之间的本质联系 [1-3].

今考察以 Γ 为边界的区域 Ω 上的 Laplace 方程的 Dirichlet 边值问题：

$$\begin{cases} \triangle u = 0, & \Omega \text{ 内}, \\ u = u_0, & \Gamma \text{ 上} \end{cases} \tag{1}$$

及 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} \triangle u = 0, & \Omega \text{ 内}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = u_n, & \Gamma \text{ 上}, \end{cases} \tag{2}$$

* 1994 年 1 月 31 日收到.
1) 国家自然科学基金资助项目.

其中 u_n 满足相容性条件 $\int_\Gamma u_n ds = 0$ 且 (2) 的解可差一任意常数.

通过自然边界归化可得，同一调和函数的这两类互补边值间的关系，即自然积分方程

$$u_n = \mathcal{K} u_0, \tag{3}$$

及 Poisson 积分公式

$$u = P u_0, \tag{4}$$

其中 $\mathcal{K}$ 及 P 分别为边界自然积分算子及 Poisson 积分算子. 易见 (4) 等价于边值问题 (1), 而 (3) 及 (4) 等价于原边值问题 (2).

在边界 Γ 上，除了上述边界自然积分算子 $\mathcal{K}$ 外，还可定义 Laplace-Betrand 算子

$$\triangle_\Gamma = \frac{d^2}{ds^2}, \tag{5}$$

其中 s 为 Γ 上的弧长参数. $\mathcal{K}$ 与 $\triangle_\Gamma$ 分别为 Γ 上的一阶拟微分算子及二阶微分算子. 那么 $\mathcal{K}$ 与 $\triangle_\Gamma$ 间是否存在某种关系？

当 Ω 为上半平面区域及半径为 R 的圆内或圆外区域时， [3] 已给出了 $\mathcal{K}$ 的表达式及 $\mathcal{K}$ 与 $\triangle_\Gamma$ 间的关系，即当 Ω 为上半平面时， Γ 为 x 轴，

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{\pi x^2} *, \tag{6}$$

$$\mathcal{K}^2 = -\frac{d^2}{dx^2} = -\frac{d^2}{ds^2} = -\triangle_\Gamma; \tag{7}$$

当 Ω 为半径为 R 的圆内或圆外区域时， Γ 是半径为 R 的圆周，

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{4\pi R \sin^2 \frac{\theta}{2}} *, \tag{8}$$

$$\mathcal{K}^2 = -\frac{1}{R^2}\frac{d^2}{d\theta^2} = -\frac{d^2}{ds^2} = -\Delta_\Gamma. \tag{9}$$

于是我们猜测，对一般的区域 Ω, $\mathcal{K}$ 与 $\triangle_\Gamma$ 间也有这样的关系.

2. 两个引理

引理 1. 若保角映射 $w = F(z)$ 映区域 Ω 为半径是 R 的圆内区域 $\tilde{\Omega}$, 映边界 Γ 为圆周 $\tilde{\Gamma}$, 则 Γ 上点 a 处的曲率为

$$k(a) = \frac{|F'(a)|}{R} - \frac{d}{ds}[\arg F'(a)], \tag{10}$$

其中 $\arg F'(a)$ 表示复数 $F'(a)$ 的幅角.

证. 设 a, b 为 Γ 上邻近点，

$$F(a) = \tilde{a}, \quad F(b) = \tilde{b}.$$

设 $\triangle\alpha$ 及 $\triangle s$ 分别为沿 Γ 由 a 到 b 时切线方向改变的角度及 a,b 间的弧长，则由定义 [4]

$$k(a)=\lim_{b\to a}\frac{\triangle\alpha}{\triangle s}.$$

于是由

$$\frac{1}{R}=\tilde{k}=\lim_{\tilde{b}\to\tilde{a}}\frac{\triangle\tilde{\alpha}}{\triangle\tilde{s}}$$

及 [5]

$$\triangle\tilde{\alpha}=\triangle\alpha+\arg F'(b)-\arg F'(a),$$

$$\triangle\tilde{s}=|F'(a)|\triangle s,$$

可得

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{|F'(a)|}\left\{\frac{d\alpha}{ds}+\frac{d}{ds}[\arg F'(a)]\right\}=\frac{1}{|F'(a)|}\left\{k(a)+\frac{d}{ds}[\arg F'(a)]\right\}.$$

由此便得 (10). 证毕.

引理 2. 若 u 为 Ω 上的调和函数，n 为边界 Γ 上的外法线方向，k 为 Γ 的曲率，则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=-k\frac{\partial u}{\partial n}-\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}. \tag{11}$$

证. 设 Γ 可表示为参数方程

$$\begin{cases} x=x(s),\\ y=y(s),\end{cases}$$

Γ 上的单位切向量及外法向量分别为 $\vec{t}=(t_1,t_2)$ 及 $\vec{n}=(n_1,n_2)$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=\nabla u\cdot\vec{t}.$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}&=(\frac{\partial}{\partial s}\nabla u)\cdot\vec{t}+\nabla u\cdot\frac{d\vec{t}}{ds}=\nabla(\frac{\partial u}{\partial s})\cdot\vec{t}+\nabla u\cdot(-k\vec{n})\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}-k\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-k\frac{\partial u}{\partial n}.\end{aligned}$$

由于

$$\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\triangle u=0,$$

故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}-k\frac{\partial u}{\partial n}.$$

证毕.

例如，Ω 为单位圆内区域，Γ 为单位圆周，$u=r^2\cos2\theta$, 易验证在 Γ 上 $(r=1,s=\theta)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=-4\cos2\theta,\quad -k\frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=-2\cos2\theta,\quad -\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=-2\cos2\theta,$$

可见 (11) 式成立.

3. 定理及其证明

定理. 设 Ω 为以 Γ 为边界的平面单连通区域，$\mathcal{K}$ 为调和方程的边界自然积分算子，$\triangle_\Gamma$ 为 Γ 上的 Laplace-Betrand 算子，则

$$\mathcal{K}^2 = -\triangle_\Gamma . \tag{12}$$

证. 由 Riemann 定理，平面上的单连通区域除了整个平面或去掉一个点的平面外均可通过保角映射化为单位圆内部区域 [5], 则必存在解析函数 $F(z)$, 映射 $w=F(z)$ 映 Ω 为半径是 R 的圆内区域 $\tilde{\Omega}$. 已知半径为 R 的圆内区域的调和方程的边界自然积分算子为 [1,3]

$$\tilde{\mathcal{K}}u(\tilde{a}) = \int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{K}(\tilde{a},\tilde{b})u(\tilde{b})d\tilde{s}(\tilde{b}), \tag{13}$$

其中 $\tilde{a}=Re^{i\theta}, \tilde{b}=Re^{i\theta'}$ 为 $\tilde{\Gamma}$ 上点的复数表示,

$$\tilde{K}(\tilde{a},\tilde{b}) = -\frac{1}{4\pi R\sin^2\dfrac{\theta-\theta'}{2}}. \tag{14}$$

从而 Ω 上调和方程的边界自然积分算子为 [3]

$$\mathcal{K}u(a) = \int_{\Gamma} K(a,b)u(b)ds(b), \tag{15}$$

其中

$$K(a,b) = |F'(a)F'(b)|\tilde{K}(\tilde{a},\tilde{b}). \tag{16}$$

这里 $a,b\in\Gamma, \tilde{a},\tilde{b}\in\tilde{\Gamma}, \tilde{a}=F(a), \tilde{b}=F(b)$. 由 (16) 可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n_a}K(a,b) &= \frac{\partial}{\partial n_a}\left\{|F'(a)F'(b)|\tilde{K}(\tilde{a},\tilde{b})\right\}\\ &= \frac{\partial|F'(a)|}{\partial n_a}|F'(b)|\tilde{K}(\tilde{a},\tilde{b}) + |F'(a)F'(b)|\frac{\partial}{\partial n_a}\tilde{K}(\tilde{a},\tilde{b})\\ &= \frac{\partial \ln|F'(a)|}{\partial n_a}|F'(a)F'(b)|\tilde{K}(\tilde{a},\tilde{b}) + |F'(a)^2F'(b)|\frac{\partial}{\partial n_{\tilde{a}}}\tilde{K}(\tilde{a},\tilde{b}).\end{aligned}$$

注意到

$$\ln|F'(z)| + i\arg F'(z) = \ln F'(z)$$

为 Ω 上解析函数，由 Cauchy-Riemann 条件有

$$\frac{\partial}{\partial n_a}\ln|F'(a)| = \frac{\partial}{\partial s}\arg F'(a).$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial n_a}K(a,b)=\left[\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{arg}F'(a)\right]|F'(a)F'(b)|\tilde{K}(\tilde{a},\tilde{b})+|F'(a)^2F'(b)|\frac{\partial}{\partial R}\tilde{K}(\tilde{a},\tilde{b})$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{arg}F'(a)\right]K(a,b)+|F'(a)^2F'(b)|\frac{1}{4\pi R^2\sin^2\frac{\theta-\theta'}{2}}$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{arg}F'(a)\right]K(a,b)-\frac{1}{R}|F'(a)^2F'(b)|\tilde{K}(\tilde{a},\tilde{b})$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{arg}F'(a)-\frac{1}{R}|F'(a)|\right]K(a,b).$$

由引理 1 即得

$$\frac{\partial}{\partial n_a}K(a,b)=-k(a)K(a,b),\tag{17}$$

其中 $k(a)$ 为 a 处 Γ 的曲率. 从而由 (15) 得

$$\frac{\partial}{\partial n}\mathcal{K}=-k\mathcal{K}.\tag{18}$$

今设 $u_0(s)$ 为 Γ 上的函数. 由调和方程的 Dirichlet 问题的解的存在唯一性知，$u=Pu_0$ 为 Ω 上的调和函数，其中 P 为 Poisson 积分算子，且 $u|_\Gamma=u_0$, $\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma=\mathcal{K}u_0$. 引进 Γ 的管状邻域 Ω_1 及其中的 (s,ν) 坐标系，这里 ν 为法向坐标，$\nu=0$ 相应于边界 Γ, $u(s,0)=u_0(s)$. 由于

$$\frac{\partial^2}{\partial n^2}u(s,\nu)=\frac{\partial}{\partial n}[\mathcal{K}(\nu)u(s,\nu)]=\left[\frac{\partial}{\partial n}\mathcal{K}(\nu)\right]u(s,\nu)+\mathcal{K}(\nu)\frac{\partial}{\partial n}u(s,\nu)$$

及 (18), 可得

$$\frac{\partial^2}{\partial n^2}u(s,\nu)\Big|_\Gamma=-k\mathcal{K}u_0+\mathcal{K}^2u_0.\tag{19}$$

又由引理 2 知

$$\frac{\partial^2}{\partial n^2}u(s,\nu)\Big|_\Gamma=-k\mathcal{K}u_0-\frac{d^2}{ds^2}u_0(s).\tag{20}$$

结合 (19) 与 (20) 便得到

$$\mathcal{K}^2u_0=-\triangle_\Gamma\, u_0.$$

证毕.

注. 对调和函数 u, 尽管有 $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma=\mathcal{K}(u|_\Gamma)$, 却一般 $\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_\Gamma\neq\mathcal{K}^2(u|_\Gamma)$. 这是因为

$$\mathcal{K}^2(u|_\Gamma)=\mathcal{K}\mathcal{K}(u|_\Gamma)=\frac{\partial}{\partial n}[P\mathcal{K}(u|_\Gamma)]_\Gamma=\frac{\partial}{\partial n}\left[P\left(\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma\right)\right]_\Gamma,$$

而一般地

$$P\left(\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma\right)\neq\frac{\partial u}{\partial n}.$$

这里左边必为调和函数，而右边却未必是调和函数. 例如，Ω 为单位圆内部，$u=r^2\cos2\theta$ 为调和函数，

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial r}u=2r\cos2\theta,$$

而

$$P\left(\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}\right) = P(2\cos 2\theta) = 2r^2\cos 2\theta.$$

于是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\bigg|_{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial r}(2r\cos 2\theta)\bigg|_{\Gamma} = 2\cos 2\theta,$$

但

$$\mathcal{K}^2(u|_{\Gamma}) = \mathcal{K}^2(\cos 2\theta) = \mathcal{K}(2\cos 2\theta) = 4\cos 2\theta,$$

两者并不相等.

参 考 文 献

[1] Feng Kang, Yu De-hao, Canonical integral equations of elliptic boundary value problems and their numerical solutions, Proc. of China-France Symp. on FEM, Science Press, Beijing, 1983, 211–252.

[2] Feng Kang, Finite element method and natural boundary reduction, Proc. of the International Congress of Mathematicians, Warszawa, 1983, 1439–1453.

[3] 余德浩，自然边界元方法的数学理论，科学出版社， 1993.

[4] 吴大任，微分几何讲义，高等教育出版社， 1965.

[5] И.И. 普里瓦洛夫著，闵嗣鹤等译，复变函数引论，人民教育出版社， 1956.