非协调元的一个 Sobolev 嵌入定理[*1)2)]

冯 康　王烈衡

(中 国 科 学 院 计 算 中 心)

A SOBOLEV IMBEDDING THEOREM FOR NONCONFORMING FINITE ELEMENT SPACES

Feng Kang　Wang Lie-heng

(*Computing Center, Academia Sinica*)

Abstract

This short paper is devoted to a Sobolev imbedding theorem for nonconforming finite element spaces, which generalizes the Soboloev imbedding theorem: $H^2(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$.

本文给出具有一定性质的非协调元空间的一个 Sobolev 嵌入定理及其证明. 首先假设平面区域 Ω 具有下述性质：对任一点 $Q \in \Omega$, 存在一条过 Q 的直线段 $\Gamma = \Gamma_Q \subset \Omega$, 使得

$$|\Gamma_Q| = \Gamma_Q \text{ 的长度 } > q > 0, \quad \forall Q \in \Omega, \tag{1}$$

且存在一个以 Γ_Q 为一边的平行四边形 $D = D_Q \subset \Omega$, 使得

$$|D_Q| = D_Q \text{ 的面积 } > q' > 0, \quad \forall Q \in \Omega, \tag{2}$$

其中 q, q' 为与 Q 无关的正常数.

设 π_h 是区域 Ω 的一个拟一致剖分， S_h 是对应的有限元空间，具有下述性质：在剖分的顶点处， S_h 中的函数 u 连续；而且在剖分单元的公共边上，至少有一点，使得 S_h 中函数 u 的法向导数 u_n 连续. 对于四阶问题的常规非协调元，比如 Morley 元，Adini 元， De Veubeke 元以及 Zienkiewicz 元等等均具有上述性质.

---

* 1994 年 1 月 24 日收到.

1) 本文根据冯康先生生前手稿中的思想，由第二位作者整理并完成. 文章由第二位作者负责.

2) 国家自然科学基金资助项目.

定理. 在关于区域 Ω 及有限元空间 S_h 的上述假设下，成立下述形式的 Sobolev 嵌入定理：

$$|u(Q)| \leq K \sum_{C} \|u\|_{2,C}, \quad \forall Q \in \Omega, \tag{3}$$

其中 $K = \text{const.} > 0$ 与 $Q \in \Omega, u \in S_h$ 及 h 无关， $C \in \pi_h$ 为单元.

证明. 对任意给定的 $Q \in \Omega$, 按假定存在直线段 $\Gamma_Q = \Gamma \subset \Omega$. 在 Γ 上任取一点 P, 则直线段 $\overline{PQ} = \Gamma$. 令

$$\overline{PQ} = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \cdots + \overline{P_{n-1}P_n}, \quad P_0 = P, P_n = Q,$$

使得 $\overline{P_{i-1}P_i}$ 含在单元内部，而 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ 在单元边上或在顶点上 (见图 1). 记 $u_s = du/ds$, 则

$$\begin{aligned} u(Q) &= u(P) + \int_{\overrightarrow{P_0P_1}} u_s ds + [u]_{P_1} + \int_{\overrightarrow{P_1P_2}} u_s ds + [u]_{P_2} + \cdots + [u]_{P_{n-1}} + \int_{\overrightarrow{P_{n-1}P_n}} u_s ds \\ &= u(P) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\overrightarrow{P_{i-1}P_i}} u_s ds + \sum_{i=1}^{n-1} [u]_{P_i}, \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $[u]_{P_i}$ 为 u 在点 P_i 处的“跳跃值”，其具体表达式将在下面给出.

我们分两种情形估计 $[u]_{P_i}, i = 1, 2, \cdots, n-1$:

(i) 当 P_i 在两个单元 C^+, C^- 的公共边 B 上 (例如图 1 中的 P_2 点)(见图 2), 则

$$[u]_{P_i} = u(P_i + 0) - u(P_i - 0),$$

其中 $u(P_i + 0) = \lim\limits_{\substack{\tilde{p}_i \to p_i \\ \tilde{p}_i \in C_i^+}} u(\tilde{P}_i)$, $u(P_i - 0) = \lim\limits_{\substack{\tilde{p}_i \to p_i \\ \tilde{p}_i \in C_i^-}} u(\tilde{P}_i)$. 令 Λ_0 是以剖分 π_h 的顶点为节点的分片线性插值算子，则 $\Lambda_0 u(P_i + 0) = \Lambda_0 u(P_i - 0)$, 从而

$$[u]_{P_i} = (u - \Lambda_0 u)(P_i + 0) - (u - \Lambda_0 u)(P_i - 0).$$

因此由反不等式及线性插值误差估计 [1,2], 有

$$\begin{aligned} [u]_{P_i}^2 &= 2(u - \Lambda_0 u)^2(P_i + 0) + 2(u - \Lambda_0 u)^2(P_i - 0) \\ &\leq K_1' h^{-2}(|u - \Lambda_0 u|_{0,C^+}^2 + |u - \Lambda_0 u|_{0,C^-}^2) \\ &\leq K_1 h^2(|u|_{2,C_i^+}^2 + |u|_{2,C_i^-}^2). \end{aligned} \tag{5}$$

(ii) 当 P_i 在顶点时 (例如图 1 中的 P_1 点)(见图 3), 则跳跃 $[u]_{P_i}$ 应通过有限个单元 $C_i^1, C_i^2, \cdots, C_i^p$ 的邻边 $B_i^1, B_i^2, \cdots, B_i^p$ 上的跳跃来表示：

$$[u]_{P_i} = \sum_{k=1}^{p} [u]_{P_i \in B_i^k}.$$

同样有

$$[u]_{P_i}^2 \le K_2 h^2 \sum_{k=1}^{p} [u]_{2,C_i^k}^2. \tag{6}$$

于是，考虑到剖分的拟一致性，以同一顶点为共同顶点的单元个数 $\le r < \infty$，而 r 与 h 无关：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}u^2(Q) &\le u^2(P) + \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \int_{\overrightarrow{P_{i-1}P_i}} u_s ds \Big\}^2 + \Big\{ \sum_{i=1}^{n-1} [u]_{P_i} \Big\}^2 \\
&\le u^2(P) + L \sum_{i=1}^{n} \int_{\overline{P_{i-1}P_i}} u_s^2 ds + n \cdot \sum_{i=1}^{n-1} [u]_{P_i}^2 \\
&\le u^2(P) + L \sum_{i=1}^{n} \int_{\overline{P_{i-1}P_i}} u_s^2 ds + K'h \sum_{C} |u|_{2,C}^2,
\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $L = \mathrm{diam}\ \Omega$，而 $n = O(h^{-1})$. 现将上式对 P 在 $\Gamma = \Gamma_Q$ 上积分，可得

$$\frac{1}{3}|\Gamma| u^2(Q) \le \int_{\Gamma} u^2 ds + L^2 \int_{\Gamma} u_s^2 ds + LK'h \sum_{C} |u|_{2,C}^2, \tag{8}$$

其中

$$\int_{\Gamma} u_s^2 ds = \sum_{i=1}^{N} \int_{\overline{P_{i-1}P_i}} u_s^2 ds, \quad N \ge n.$$

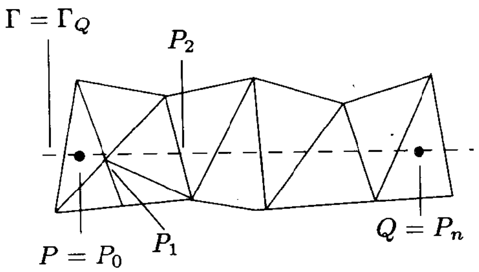

图 1

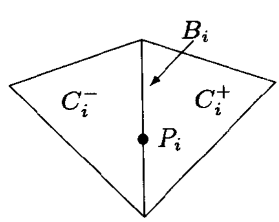

图 2

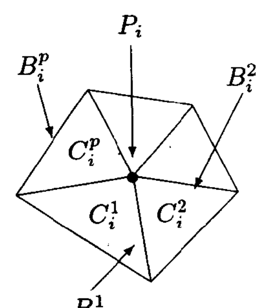

图 3

由痕迹嵌入定理 [1] 有

$$\int_{\Gamma} u^2 ds \le K_1(\|u\|_{0,D}^2 + |u|_{1,D,h}^2), \quad \int_{\Gamma} u^2 ds \le K_2(|u|_{1,D,h}^2 + |u|_{2,D,h}^2),$$

其中

$$|u|_{k,D,h}^2 = \sum_{C, C\cap D \ne \emptyset} |u|_{k,C}^2, \quad k = 1, 2.$$

同时由 [1] 可见，K_1, K_2 与 $D=D_Q$ 的面积成反比，因而由假设 $|D_Q|>q'>0, \forall Q\in\Omega$，于是 K_1，K_2 可取为与 $Q\in\Omega$ 无关的常数．综合上述及 (8) 可见

$$u^2(Q)\le\frac{3}{q}\{K_1\|u\|^2_{0,D}+(K_1+L^2K_2)|u|^2_{1,D,h}+L^2K_2|u|^2_{2,D,h}+LK'h\sum_C|u|^2_{2,C}\}$$

$$\le K\sum_C\|v\|^2_{2,C}.$$

定理得证

参　考　文　献

[1] 冯康，非协调有限元空间的 Poincaré, Friedrichs 不等式，“冯康文集”，国防工业出版社，1994, 339–352.

[2] P.G.Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, Amsterdam, 1978.