非协调元的分数阶 Sobolev 空间[*1)2)]

冯 康　王烈衡

(中 科 院 计 算 中 心)

FRACTIONAL ORDER SOBOLEV SPACES FOR NONCONFORMING FINITE ELEMENTS

Feng Kang　Wang Lie-heng

(*Computing Center, Academia Sinica*)

Abstract

This paper is devoted to dealing with the fractional order Sobolev spaces for nonconforming finite elements. The factional order embedding theorem is established.

本文对非协调元空间定义了分数阶 Sobolev 范数并证明了分数阶迹嵌入定理. 假定平面多边形区域 Ω 的剖分是拟一致的且满足反假设，对应的有限元空间 S_h 具有下述性质：对于 $u\in S_h, u$ 在区域 Ω 的剖分 π_h 的每个线元上至少有一个连续点. 设 $\Gamma\subset\partial\Omega$ 为 Ω 边界的一直线段.

定义.

$$\|u\|^2_{1/2,\Gamma}=\|u\|^2_{0,\Gamma}+\sum_{\mu=1}^N\sum_{\nu=1}^N\int_{B_\mu}dP\int_{B_\nu}\Big(\frac{u(P)-u(P')}{r(P,P')}\Big)^2dP', \tag{1}$$

其中 $\Gamma=\overline{QQ'}=\sum_{\mu=1}^N B_\mu, B_\mu$ 为边界上的线元，而

$$r(P,P')=((x_P-x_{P'})^2+(y_P-y_{P'})^2)^{1/2},\quad P=(x_P,y_P),\quad P'=(x_{P'},y_{P'}).$$

定理. 设区域 Ω 具有下述性质：作一个以 Γ 为斜边的直角三角形，使其整个包含在 Ω 中 (图 1), 则下述不等式成立：

$$\sum_{\mu=1}^N\sum_{\nu=1}^N\int_{B_\mu}dP\int_{B_\nu}\Big(\frac{u(P)-u(P')}{r(P,P')}\Big)^2dP'\le K\sum_C|u|^2_{1,c},\quad\forall u\in S_h, \tag{2}$$

* 1994 年 1 月 24 日收到.

1) 本文根据冯康先生生前手稿中的思想，由第二作者整理并完成.

2) 国家自然科学基金资助项目.

即

$$\|u\|_{1/2,\Gamma}^2 \le K \sum_C \|u\|_{1,C}^2, \quad \forall u \in S_h, \tag{3}$$

其中 $K=$ const. >0 与 u 及 h 无关， C 为剖分单元.

为了证明定理，需要两个引理.

引理 1. (Hardy 不等式)[3]. (i) 积分形式

$$\int_0^A \Big(\frac{\int_0^x f(\xi)d\xi}{x}\Big)^2 dx < 4\int_0^A f^2(x)dx, \tag{4}$$

其中 $0<A\le\infty$;

(ii) 级数形式

$$\sum_{k=1}^M \left(\frac{\sum_{i=1}^k a_i}{k}\right)^2 < 4\sum_{k=1}^M a_k^2, \tag{5}$$

其中 M 为自然数或 ∞. 只要上述二式右端有意义且不为零.

引理 2. (同阶嵌入定理) [1,4]. 设 C 是一平面三角形，边界为 $\partial C, P$ 是定义在 C 上的一个多项式空间，则

$$|u|_{k,\partial C} \le K h^{-1/2} |u|_{k,C}, \quad \forall u \in P, \tag{6}$$

其中 $h=\operatorname{diam} C$, $K=$ const. >0 与 h 无关.

定理的证明. 对于任意给定的 $P, P'\in\Gamma$ 且 P' 在 P 的上方，即 $y_{P'}\ge y_P$ 时，作直角三角形，为简单计，不妨设为直角等腰三角形， $PRP'\subset\Omega$, 则存在两条“纵”，“横”带 $F_P, F'_{P'}$, 它们分别由单元组成，使得 $PR\subset F_P$, $\forall P\in B_P$, $P'R\subset F'_{P'}$, $\forall P'\in B_{P'}$, B_P 及 $B_{P'}$ 分别为包含 P 及 P' 的线元，而 F_P 及 $F'_{P'}$ 的宽度为 $O(h)$, 即

$$|F_P| = F_P \text{ 的面积}, \quad |F'_{P'}| = F'_{P'} \text{ 的面积} \le Kh, \quad \forall P, P'\in\Gamma, \tag{7}$$

其中 K 是与 P, P' 的选取无关且与 h 无关的正常数. 考虑到剖分的拟一致性，当 h 足够小时，对任何单元 $C\in\pi_h$, 共享它的带 F_P (或 $F'_{P'}$) 的个数 $\le q<\infty$, 常数 q 与 h 无关.

设 $\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{P_0P_1}+\overrightarrow{P_1P_2}+\cdots+\overrightarrow{P_nP_{n-1}}$, $P_0=P$, $P_n=R$, $\overrightarrow{P'R}=\overrightarrow{P'_0P'_1}+\overrightarrow{P'_1P'_2}+\cdots+\overrightarrow{P'_{m-1}P'_m}$, $P'_0=P'$, $P'_m=R$, 而 $P_1,P_2,\cdots,P_{n-1}$ 及 $P'_1,P'_2,\cdots,P'_{m-1}$ 分别在 F_P 及 $F'_{P'}$ 的单元的边界上 (图 1).

于是 $\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RP'}$,

$$u(P)-u(P')=\sum_{i=1}^{n}\int_{\overrightarrow{P_{i-1}-P_i}}u_s ds+\sum_{i=1}^{n-1}[u]_{P_i}-\sum_{j=1}^{m}\int_{\overrightarrow{P'_{j-1}-P'_j}}u_s ds-\sum_{j=1}^{m-1}[u]_{P'_j}$$
$$=\int_{\overrightarrow{PR}}u_s ds+\sum_{i=1}^{n-1}[u]_{P_i}-\int_{\overrightarrow{P'R}}u_s ds-\sum_{j=1}^{m-1}[u]_{P'_j},$$

其中 $[u]_{P_i}$ 为 u 在 P_i 处的跳跃值，具体表达式见下面文中，从而

$$\frac{1}{4}\Big(\frac{u(P)-u(P')}{r(P,P')}\Big)^2\le\Big(\frac{\int_{\overrightarrow{PR}}u_s ds}{r(P,P')}\Big)^2+\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}[u]_{P_i}}{r(P,P')}\Big)^2+\Big(\frac{\int_{\overrightarrow{P'R}}u_s ds}{r(P,P')}\Big)^2+\Big(\frac{\sum_{j=1}^{m-1}[u]_{P'_j}}{r(P,P')}\Big)^2. \tag{8}$$

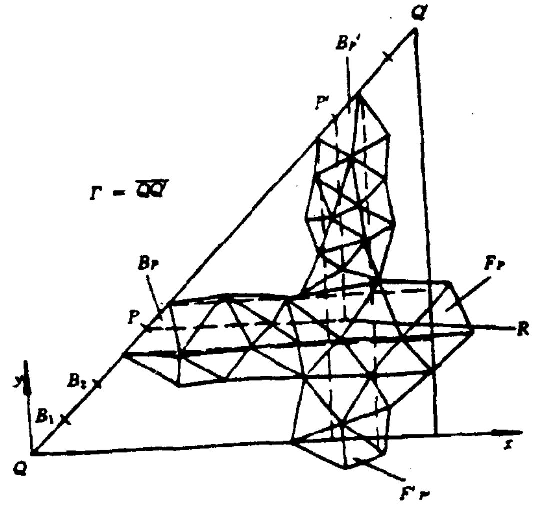

图 1

将上式右端前两项对 P' 在 $\overline{PQ'}\subset\Gamma$ 上积分. 首先考察第一项:

$$\int_{\overline{PQ'}}\Big(\frac{\int_{\overrightarrow{PR}}u_s ds}{r(P,P')}\Big)^2 dP'\le\int_{\overline{PQ'}}\Big(\frac{\int_{x_P}^{x_{P'}}|u_x(\xi,y_P)|d\xi}{\sqrt{2}|x_{P'}-x_P|}\Big)^2 dP'$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{x_P}^{x_{Q'}}\Big(\frac{\int_{x_P}^{x_{P'}}|u_x(\xi,y_P)|d\xi}{|x_{P'}-x_P|}\Big)^2 dx_{P'}$$
$$<2\sqrt{2}\int_{x_P}^{x_{Q'}}u_x^2(\xi,y_P)d\xi\le K_1h^{-1}\iint_{F_P}u_x^2dxdy, \tag{9}$$

其中

$$\iint_{F_P}u_x^2dxdy=\sum_{C\in F_P}\iint_C u_x^2dxdy, \tag{10}$$

(9) 式倒数第二个不等式是由于积分形式的 Hardy 不等式，而最后的不等式是利用了同阶嵌入不等式. 以后凡是出现 K,K',K_1,K_2 等等均为与 u 及 h 无关的绝对常数，且在

不同处可能取不同值. 其次估计 (8) 式右端第二项对 P' 在 $\overline{PQ'}$ 上的积分,

$$\int_{\overline{PQ'}}\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}[u]_{P_i}}{r(P,P')}\Big)^2 dP' \le \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{x_P}^{x_{Q'}}\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}|[u]_{P_i}|}{|x_{P'}-x_P|}\Big)^2 dx_{P'}. \tag{11}$$

由于

$$|x_{P'}-x_P|^2 \ge \sum_{i=1}^{n}|x_{P_i}-x_{P_i-1}|^2 \ge K'nh^2,$$

$$\int_{x_P}^{x_{Q'}}(\cdots)dx_{P'} = \sum_{n=1}^{N'}\int_{x_{P_{n-1}}}^{x_{P_n}}(\cdots)dx_{P'}, \quad x_{P_0}=x_P,\ x_{P_{N'}}=x_{Q'},$$

从而由级数形式的 Hardy 不等式,

$$\begin{aligned}\int_{x_P}^{x_{Q'}}\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}|[u]_{P_i}|}{|x_{P'}-x_P|}\Big)^2 dx_{P'} &= \sum_{n=1}^{N'}\int_{x_{P_{n-1}}}^{x_{P_n}}\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}|[u]_{P_i}|}{|x_{P'}-x_P|}\Big)^2 dx_{P'}\\ &\le K_1h^{-1}\sum_{n=1}^{N'}(n\cdot|x_{P_n}-x_{P_{n-1}}|)\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}|[u]_{P_i}|}{n-1}\Big)^2\\ &< 4K_1h^{-1}\sum_{n=1}^{N'}[u]_{P_n}^2,\end{aligned} \tag{12}$$

这里还应注意 $n\cdot|x_{P_n}-x_{P_{n-1}}| \le K'$, $\forall 1\le n\le N'$. 现在估计 $[u]_{P_n}^2, n=1,\cdots,N'$, 同时给出 $[u]_{P_n}$ 的具体表达式. 设 P_n 在单元 C_+,C_- 的公共边 B 上, 按 S_h 的性质, 存在一点 $M_n\in B$, 使得 u 在 M_n 处连续 (图 2), 从而

$$\begin{aligned}[u]_{P_n} &= u(P_n+0)-u(P_n-0) = (u(P_n+0)-u(M_n+0))\\ &\quad -(u(P_n-0)-u(M_n-0)) = |\overline{P_nM_n}|(u_s(\xi^+)-u_s(\xi^-)),\end{aligned}$$

其中 $u(P_n+0)=u|_{C^+}(P_n)$, $u(P_n-0)=u|_{C^-}(P_n)$, 而 $u_s(\xi^+)=u_s|_{C^+}(\xi)$, $u_s(\xi^-)=u_s|_{C^-}(\xi)$, 从而由反不等式 [2]

$$|[u]_{P_n}|^2 \le K'h^2\Big(\max_{C^+}|\nabla u|^2+\max_{C^-}|\nabla u|^2\Big) \le K'(|u|_{1,C^+}^2+|u|_{1,C^-}^2). \tag{13}$$

当 P_n 为单元 $C_{1,P_n},C_{2,P_n},\cdots,C_{l,P_n}$ 的公共顶点时 (图 3), 可同样证明

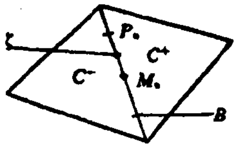

图 2

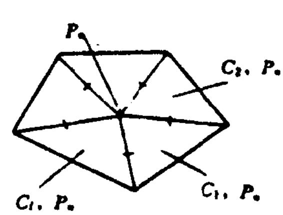

图 3

$$|[u]_{P_n}|^2 \le K'(|u|^2_{1,C_1,P_n} + \cdots + |u|^2_{1,C_l,P_n}). \tag{13'}$$

考虑到剖分的拟一致性质， $l \le r < \infty$ 而 r 与顶点无关且与 h 无关，因此由 (12), (13)(或 [13']) 可见

$$\int_{x_P}^{x_{Q'}} \Big(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}|[u]_{P_i}|^2}{|x_{P'}-x_P|}\Big)^2 dx_{P'} \le K'h^{-1}\sum_{C\in F_P}|u|^2_{1,C},$$

从而

$$\int_{\overline{PQ'}} \Big(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}[u]_{P_i}}{r(P,P')}\Big)^2 dP' \le K_1h^{-1}\sum_{C\in F_P}|u|^2_{1,C}. \tag{14}$$

综合 (9), (10) 及 (14), 可见

$$\begin{aligned}\int_{\overline{PQ'}} \Big(\frac{\int_{\overrightarrow{PQ}} u_s ds}{r(P,P')}\Big)^2 dP' + \int_{\overline{PQ'}} \Big(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}[u]_{P_i}}{r(P,P')}\Big)^2 dP' &\le K_1h^{-1}\Big(\iint_{F_P} u_x^2 dxdy + \sum_{C\in F_P}|u|^2_{1,C}\Big)\\ &\le K_1h^{-1}|u|^2_{1,F_P} = K_1h^{-1}|u|^2_{1,F_{\mu(P)}}, \quad \forall P\in B_\mu.\end{aligned} \tag{15}$$

当 P' 在 P 的下方时，同样可有 (图 4), 只是 F_P 为“纵”条，于是

$$\begin{aligned}\int_{\overline{PR'}} \Big(\frac{\int_{\overrightarrow{PQ}} u_s ds}{r(P,P')}\Big)^2 dP' + \int_{\overline{PQ'}} \Big(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}[u]_{P_i}}{r(P,P')}\Big)^2 dP' &\le K_1h^{-1}\Big(\iint_{F_P} u_y^2 dxdy + \sum_{C\in F_P}|u|^2_{1,C}\Big)\\ &\le K_1h^{-1}|u|^2_{1,F_{\mu(P)}}, \quad \forall P\in B_\mu.\end{aligned} \tag{16}$$

由 (15), (16) 可见

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma dP\int_\Gamma \Big\{\Big(\Big(\frac{\int_{\overrightarrow{PR}} u_s ds}{r(P,P')}\Big)^2 + \Big(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}[u]_{P_i}}{r(P,P')}\Big)^2\Big\}dP'\\ &= \int_{\overline{QQ'}} dP\Big(\int_{\overline{PQ'}} + \int_{\overline{PQ}}\Big)\{\cdots\}dP' = \sum_\mu \int_{B_\mu}\Big(\int_{\overline{PQ'}} + \int_{\overline{PQ}}\Big)\{\cdot\}dP'\\ &\le K_1h^{-1}\sum_\mu h|u|^2_{1,F_{\mu(P)}} \le K_1\sum_C |u|^2_{1,C}.\end{aligned}$$

至于 (8) 式右端最后两项的积分，应交换积分变量次序，于是有

$$\int_\Gamma dP\int_\Gamma \Big\{\Big(\frac{\int_{\overrightarrow{PR}} u_s ds}{r(P,P')}\Big)^2 + \Big(\frac{\sum_{j=1}^{m-1}[u]_{P'_j}}{r(P,P')}\Big)^2\Big\}dP' = \int_\Gamma dP'\int_\Gamma\{\cdots\}dP,$$

然后同上面一样可得

$$\int_\Gamma\int_\Gamma \Big\{\Big(\frac{\int_{\overrightarrow{P'R}} u_s ds}{r(P,P')}\Big)^2 + \Big(\frac{\sum_{j=1}^{m-1}[u]_{P'_j}}{r(P,P')}\Big)^2\Big\}dPdP' \le K_1\sum_C |u|^2_{1,C}. \tag{18}$$

由 (17), (18) 及 (8) 即得

$$\frac{1}{4}\int_{\Gamma}\int_{\Gamma}\Big(\frac{u(P)-u(P')}{r(P,P')}\Big)^2 dP'dP \le K_1\sum_{C}|u|_{1,C}^2,$$

即证明了 (2). 再利用 [1] 中的痕迹嵌入定理, (3) 得证.

附注 1. 定理的条件可放宽为如下: 作一个以 Γ 为一边的三角形, 整个包含在 Ω 中 (图 5). 此时以该三角形的另外两边作为仿射坐标 (x,y), 代替原来的直角坐标 (x,y), 其余过程完全相同.

附注 2. 当 Γ 由折线组成 (而不是一直线段) 时, 只要对每相邻两段直线具有附注 1 的类似性质, 即作一个四边形整个包含在 Ω 中, 而该两段直线为此四边形的两边时 (图 6), 定理结论依然正确. 为此注意, 当只要 P,P' 不在相邻两段直线段上, 则 $r(P,P')\ge q'>0$, 从而

$$\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_1}\Big(\frac{u(P)-u(P')}{r(P,P')}\Big)^2 dP'dP \le \frac{2}{(q')^2}\Big(|\Gamma_3|\int_{\Gamma_1}u^2(P)dP+|\Gamma_1|\int_{\Gamma_3}u^2(P')dP'\Big)$$
$$\le K\sum_{C}\|u\|_{1,C}^2,$$

其中最后不等式利用了 [1] 中的痕迹嵌入定理.

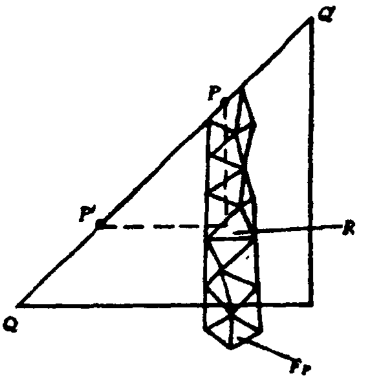

图 4

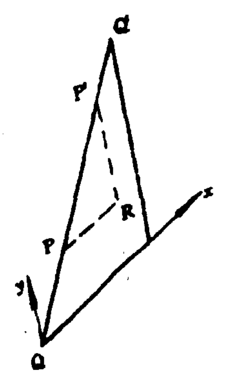

图 5

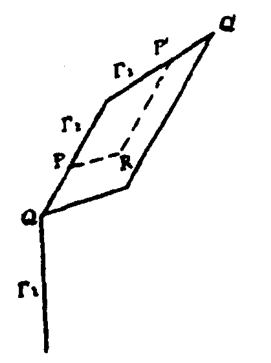

图 6

参 考 文 献

[1] 冯康, 非协调有限元空间的 Poincaré, Friedrichs 不等式, 冯康文集, 国防工业出版社, 1994, 340–353.

[2] P.G. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[3] Hardy, 不等式, 越民义译, 科学出版社, 1965.

[4] F. Stummel, The gemeralized patch test, *SIAM J. Numer. Anal.*, 16 (1979), 449–471.