

# 样条有限元\*

石钟慈

(中国科技大学)

## 摘 要

本文用三次B样条变分方法解规则区域上板梁组合弹性结构的平衡问题。推导出了适用于各种边界条件的统一计算格式,便于在计算机上实现。与通常有限元相比,具有计算量少、精确度高等显著特点。文中对自然边界条件作为约束条件的影响给予了考虑,并以板的弯曲问题为例说明影响极微。给出了几个数值的例子。

近十几年来,国内外在生产实践的基础上建立起来的有限元法[1, 2],在工程技术及科学研究的许多领域得到了日益广泛的应用和深入的发展。有限元法以变分原理和剖分插值为基础,成功地吸收了传统能量法和差分法的优点,使离散化过程既具有能量法的明确的物理背景,从而较为真实和充分地反映出被分析对象的各种内在特征,又使离散化后代数方程组的系数阵具有差分法的稀疏形式,节省存储又便于解算。这是一个高度通用的数值方法,特别适用于几何上、物理上比较复杂的问题。

但是,对于规则区域,例如矩形,有限元法的解题效率并不比一般差分方法高。因此,有必要针对这类区域(实践中这类问题也不少),根据矛盾的特殊性,制定一些高效率的数值方法。一些计算实践表明,以变分原理和样条函数为基础的样条有限元法,或称样条能量法,就属于这样一种方法(一次样条有限元相当于有限元法中的线性元,此时二法合一。本文主要讨论三次样条有限元)。它具有有限元法的许多优点,例如系数阵的对称、正定、稀疏性,以及不计自然边界条件等等,又有精度高、计算量少的特点。其缺点是通用性差,只适用于一些特殊形状的区域及边界条件。因此,在实际应用中,它可看作是通常有限元法的一种补充,一个解决普遍性问题,一个解决特殊性问题。

本文从扼要介绍B样条的一些基本特性开始,对结构力学中最常用的一些构件,如梁、板(矩形、菱形等)以及板梁组合结构,用三次样条有限元逐个进行详细分析,推导出各种计算公式以及必要的一些数据。在讨论中特别注意到与有限元法相比较,说明二者异同之处。文中附有几个数值例子以说明方法的精度与工作量,并与有限元等方法的计算结果作比较。

## §1. B 样 条

本节概括地叙述一下B样条及其主要特性,作为以后应用的一个基础。

\* 1978年5月15日收到。

设  $\varphi_0(x)$  为区间  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  上的特征函数:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \\ 0 & |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

用下列卷积公式定义函数:

$$\varphi_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n-1}(t) \varphi_0(x-t) dt \quad n = 1, 2, \dots,$$

则  $\varphi_n(x)$  就是 Schoenberg 的  $n$  次 B 样条.

$n$  次 B 样条的主要特性如下:

1° 紧凑性.  $\varphi_n(x)$  以区间  $\left[-\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right]$  为紧支集, 在此区间外处处为 0.

2° 分段光滑性.  $\varphi_n(x)$  是一个分段  $n$  次多项式, 在  $n+1$  个小区间  $\left[-\frac{n+1}{2}, -\frac{n+1}{2}+1\right]$ ,  $\left[-\frac{n+1}{2}+1, -\frac{n+1}{2}+2\right]$ ,  $\dots$ ,  $\left[\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\right]$  上有不同的表达式, 在整个实轴上  $\varphi_n(x) \in C_{n-1}(-\infty, \infty)$ .

3° 成立积分递推式

$$\varphi_n(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \varphi_{n-1}(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

以及代数递推式

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \left[ \left( \frac{n+1}{2} + x \right) \varphi_{n-1}\left(x + \frac{1}{2}\right) + \left( \frac{n+1}{2} - x \right) \varphi_{n-1}\left(x - \frac{1}{2}\right) \right],$$

$$n = 1, 2, \dots$$

可以用这两个递推公式算出 B 样条及其各阶导数, 递推过程是稳定的.

4° 展开定理. 当  $n$  为奇数 (偶数) 时, 任何以整点  $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (半整点  $x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots$ ) 为结点的  $n$  次样条  $S_n(x)$  可以表为  $\varphi_n(x)$  及其平移  $\varphi_n(x-k)$  的线性组合:

$$S_n(x) = \sum c_k \varphi_n(x-k).$$

特别, 如果  $n$  为奇数, 则区间  $[a, b]$  上以  $a, a+h, \dots, a+Nh$  ( $h = \frac{b-a}{N}$ ) 为结点的  $n$  次样条  $S_n(x)$  可以表为

$$S_n(x) = \sum_{k=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}+N} c_k \varphi_n\left(\frac{x-x_k}{h}\right), \quad x_k = a + kh.$$

这表示 B 样条  $\left\{ \varphi_n\left(\frac{x-x_k}{h}\right) \right\}_{k=-\frac{n-1}{2}, \dots, \frac{n-1}{2}+N}$  共  $n+N$  个, 是  $n$  次样条的一组基.

5° 从几何上看,  $\varphi_n(x)$  是单峰式的对称山丘状函数, 以  $x=0$  为唯一极大点. 当  $n$

增大时,图形渐趋平坦,而积分值  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) dx = 1, n = 1, 2, \dots$ .

常用的一次、三次与五次 B 样条的表示式如下:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x+1 & x \in [-1, 0] \\ 1-x & x \in [0, 1] \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}, \quad \varphi_3(x) = \frac{1}{6} \begin{cases} (x+2)^3 & x \in [-2, -1] \\ (x+2)^3 - 4(x+1)^3 & x \in [-1, 0] \\ (2-x)^3 - 4(1-x)^3 & x \in [0, 1] \\ (2-x)^3 & x \in [1, 2] \\ 0 & |x| > 2 \end{cases}$$

$$\varphi_5(x) = \frac{1}{120} \begin{cases} (x+3)^5 & x \in [-3, -2] \\ (x+3)^5 - 6(x+2)^5 & x \in [-2, -1] \\ (x+3)^5 - 6(x+2)^5 + 15(x+1)^5 & x \in [-1, 0] \\ (3-x)^5 - 6(2-x)^5 + 15(1-x)^5 & x \in [0, 1] \\ (3-x)^5 - 6(2-x)^5 & x \in [1, 2] \\ (3-x)^5 & x \in [2, 3] \\ 0 & |x| > 3 \end{cases}.$$

以下我们主要应用三次 B 样条.

## § 2. 梁 的 弯 曲

本节讨论用三次样条有限元解平面梁的弯曲问题,作为分析板的弯曲以及板梁组合结构的一个导引.

首先,我们知道,当外力是一个集中力时,抗弯梁的挠度曲线就是一个三次样条,所以,用三次样条的线性组合来分析梁的弯曲是十分自然的.

假设梁的纵长在  $x$  轴向,弯曲发生在  $xy$  平面内.设变形前梁的中性轴与  $x$  轴一致,两端点坐标为  $x=0, x=a$ .令  $v(x)$  表示中性轴上点  $x$  的横向位移,  $f(x)$  表示作用于梁上的横向载荷密度.在小变形情况下,梁的应变能为

$$J[v] = \frac{1}{2} \int_0^a D v''^2 dx, \quad (2.1)$$

其中  $D = EI_z$  为断面的抗弯刚度,  $E$  为杨氏模量,  $I_z = \iint y^2 ds$  为断面  $s$  绕  $z$  轴的惯性矩.外功势能为

$$F[v] = - \int_0^a f v dx, \quad (2.2)$$

梁的总能量

$$U[v] = J[v] + F[v] = \frac{1}{2} \int_0^a D v''^2 dx - \int_0^a f v dx. \quad (2.3)$$

两端边界条件最常见的是以下三种类型的组合:

\* 在不致引起混淆的情况下,以下都把积分元略去.

1° 固支边:  $v = 0, v' = 0$ , 即位移为 0, 转角为 0.

2° 简支边:  $v = 0, v'' = 0$ , 即位移为 0, 弯矩为 0.

3° 自由边:  $v'' = 0, (Dv'')' = 0$ , 即弯矩为 0, 剪力为 0.

除此三种外, 还可以是弹性支承. 例如在  $x = 0$  处承受正比于位移偏差的弹性反力

$$-c_1(v - \bar{v}) = -c_1 v + g, \quad g = c_1 \bar{v}$$

为已知值, 边界条件的形式为

$$(Dv'')'_0 = -c_1 v(0) + g.$$

这时必须在应变能  $J[v]$  中增加一项  $c_1 v^2(0)/2$ , 在外功势能  $F[v]$  中增加一项  $-gv(0)$ . 或者在  $x = a$  处承受弹性反弯矩  $-c_2(v'(a) - \bar{\omega}) = -c_2 v'(a) + m, m = c_2 \bar{\omega}$  为已知值, 边界条件的形式为

$$(Dv'')_a = -c_2 v'(a) + m.$$

这时必须在应变能中增加一项  $1/2 c_2 v'^2(a)$ , 外功势能中增加一项  $-mv'(a)$ .

如果除了线载荷  $f(x)$  外, 在端点还承受横向点力或点弯矩, 例如在  $x = 0$  处承受点力  $g_0$ , 在  $x = a$  处承受点弯矩  $m_a$ , 则外功势能为

$$F[v] = - \int_0^a f v - g_0 v(0) - m_a v'(a).$$

根据最小势能原理, 平衡态的位移使总势能  $U[v]$  达到最小值:

$$\text{Min}_{v \in H_E^2} U[v], \quad (2.4)$$

其中  $H_E^2$  是指  $[0, a]$  中二次导数平方可积 (有限能量) 并满足强加边界条件的函数集合. 在以上所列举的各种边界条件中, 只有固支边  $v = 0, v' = 0$  以及简支边中的  $v = 0$  是强加边界条件, 其他种种都是自然边界条件, 在变分问题 (2.4) 中不必明白列出. 当能量达到极小时, 即平衡态位移, 自动得到满足.

现在我们用三次样条有限元解变分问题 (2.4), 也就是在 Ritz-Галёркин 法中取三次 B 样条为基函数. 为确定起见, 假设左端点  $x = 0$  固定, 右端点  $x = a$  自由, 即分析的是悬臂梁, 并假设抗弯刚度  $D$  等于常数 (非常数情况后面讨论).

变分问题 (2.4) 取形式

$$\text{Min}_{v \in H_E^2} \left\{ \frac{D}{2} \int_0^a v''^2 - \int_0^a f v \right\}, \quad (2.5)$$

$$H_E^2 = \{v(x) \mid J[v] < \infty, v(0) = v'(0) = 0\}.$$

将区间  $[0, a]$  分成  $N$  等分, 记  $x_k = kh, k = 0, \dots, N, N = \frac{a}{h}$ . 再向左右两端各延伸一点  $x_{-1} = -h, x_{N+1} = a + h$ . 由 §1 展开定理,

$$V = \text{Span} \left\{ \varphi_3 \left( \frac{x}{h} - k \right) \right\}_{k=-1, \dots, N+1}$$

是  $[0, a]$  上以  $x_k (k = 0, \dots, N)$  为结点的三次样条的一组基, 这是一个  $N + 3$  维空间. 记号  $\text{Span} \{ \varphi_n \}$  表示由  $\varphi_n$  张成的空间.

为了后面使用方便, 我们将这组基改换一下形式: 当  $n \geq 4$  时, 将头三个函数换成其线性组合:

$$\varphi_3\left(\frac{x}{h} + 1\right), \varphi_3\left(\frac{x}{h}\right) - 4\varphi_3\left(\frac{x}{h} + 1\right), \varphi_3\left(\frac{x}{h} - 1\right) - \frac{1}{2}\varphi_3\left(\frac{x}{h}\right) + \varphi_3\left(\frac{x}{h} + 1\right),$$

同时将末三个函数也换成其线性组合:

$$\begin{aligned} & \varphi_3\left(\frac{x}{h} - N + 1\right) - \frac{1}{2}\varphi_3\left(\frac{x}{h} - N\right) + \varphi_3\left(\frac{x}{h} - N - 1\right), \\ & \varphi_3\left(\frac{x}{h} - N\right) - 4\varphi_3\left(\frac{x}{h} - N - 1\right), \quad \varphi_3\left(\frac{x}{h} - N - 1\right). \end{aligned}$$

显然, 改换前后的两个空间是等价的. 将改换后的基函数依次简记为  $\Phi_{-1}(x), \Phi_0(x), \dots, \Phi_{N+1}(x)$ , 则

$$V = \text{Span} \{ \Phi_k(x) \}_{k=-1, \dots, N+1}.$$

$$\text{当 } N=2 \text{ 时, } \Phi_{-1}(x) = \varphi_3\left(\frac{x}{h} + 1\right), \quad \Phi_0(x) = \varphi_3\left(\frac{x}{h}\right) - 4\varphi_3\left(\frac{x}{h} + 1\right),$$

$$\Phi_1(x) = \varphi_3\left(\frac{x}{h} + 1\right) - \frac{1}{2}\varphi_3\left(\frac{x}{h}\right) + \varphi_3\left(\frac{x}{h} - 1\right) - \frac{1}{2}\varphi_3\left(\frac{x}{h} - 2\right) + \varphi_3\left(\frac{x}{h} - 3\right),$$

$$\Phi_2(x) = \varphi_3\left(\frac{x}{h} - 2\right) - 4\varphi_3\left(\frac{x}{h} - 3\right), \quad \Phi_3(x) = \varphi_3\left(\frac{x}{h} - 3\right).$$

这组新的基函数具有这样的特点: 在左端点  $x=0$  有

$$\Phi_k(0) = 0 \quad (k \neq -1), \quad \Phi'_k(0) = 0 \quad (k \neq -1, 0).$$

在右端点  $x=a$  有

$$\Phi_k(a) = 0 \quad (k \neq N+1), \quad \Phi'_k(a) = 0 \quad (k \neq N, N+1).$$

基函数的这一特点使边界处理变得十分方便, 对实际计算工作带来很大好处.

现在我们在  $V$  中取一子集  $V_{CF}$  作为变分问题(2.5)的可取函数集. 根据上述基函数的特性, 显然有

$$V_{CF} = \text{Span} \{ \Phi_k(x) \}_{k=1, 2, \dots, N+1}.$$

令

$$v(x) = \sum_{k=1}^{N+1} r_k \Phi_k(x). \quad (2.6)$$

代入(2.5), 得到关于系数  $r_k$  的  $N+1$  阶代数方程组

$$\sum_{j=1}^{N+1} a_{ij} r_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N+1, \quad (2.7)$$

其中

$$a_{ij} = D \int_0^a \Phi_i''(x) \Phi_j''(x), \quad f_i = \int_0^a f(x) \Phi_i(x).$$

从(2.7)解出  $r_k$ , 代入(2.6)即得近似解  $v(x)$ , 由此可算出任意一点的位移值. 注意, 由于基函数  $\Phi_k(x)$  的紧凑性, 对于任一点  $\xi$ , 和式  $v(\xi) = \sum_{k=1}^{N+1} r_k \Phi_k(\xi)$  中实际上最多只含有四项, 其余均为 0. 特别, 如果要求计算结点  $x_i$  处的位移值, 则和式中最多只有三项不为 0:

$$v(x_i) = r_{i-1} \Phi_{i-1}(x_i) + r_i \Phi_i(x_i) + r_{i+1} \Phi_{i+1}(x_i),$$

而  $\Phi_k(x)$  在结点上的值  $\Phi_k(x_i)$  则是一些现成的数, 计算是很简单的. 因此, 虽然从方程 (2.7) 解出的  $r_k$  不像有限元法那样直接就是待求的位移值, 但只要经过极为简单的运算马上就可得到所需的值. 如果要求计算梁的转角或弯矩, 则只要将近似解 (2.6) 微分一次或二次, 并且和式中最多亦只含有 4 项(非结点)或三项(结点), 而  $\Phi'_k(x_i)$ ,  $\Phi''_k(x_i)$  也是一些现成的数.

注意, 用三次样条有限元算出的弯矩在各点是连续的.

我们再来考察方程组 (2.7). 记系数矩阵为  $K = (a_{ij})$ , 显然,  $K$  对称正定. 此外, 由于 B 样条的紧凑性, 当  $|i - j| \geq 4$  时乘积

$$\Phi'_i(x) \Phi'_j(x) = 0.$$

所以  $K$  是一个带状矩阵, 半带宽  $l = 3$ , 这对解方程是有利的. 在经典的能量法中, 基函数通常都是一些解析函数, 由此得到的系数矩阵是满的, 无论存储量或计算量都比较大. 而用 B 样条作基函数, 系数矩阵是稀疏的, 具有通常有限元法的优点.

另一方面, 我们指出, 若用通常的三次 Hermite 元解变分问题 (2.5), 总刚度矩阵的半带宽也等于 3, 与三次样条有限元一样. 但是, 三次 Hermite 元每个结点有 2 个参数, 样条有限元每个结点只有一个参数 (不计边界以外扩充的点), 所以, 若用相同的结点数, 两种方法的系数矩阵阶数之比约为 2:1, 而二者的精度为同一数量级:  $J[v^* - v_h] = O(h^4)$ , 这里  $v^*$  表示真解,  $v_h$  表示依赖于  $h$  的近似解. 因此, 用样条有限元显然要合算得多.

令矩阵

$$A = D \left( \int_0^a \Phi'_i(x) \Phi'_j(x) \right)_{i,j=-1,\dots,N+1},$$

其具体形式将在 §3 中与其他矩阵一并给出. 去掉  $A$  的第一、二两行与第一、二两列就是上面所讨论的左端固支、右端自由的悬臂梁的系数矩阵  $K$ . 其他边界条件也可类似处理. 例如, 二端简支梁, 则只要从  $A$  中去掉第一行第一列以及末一行末一列就是所对应的系数矩阵.

由此可见, 对于各种边界条件, 只要在  $A$  中去掉头几行几列与末几行几列即得对应的系数矩阵, 统一处理十分方便.

在以上讨论中, 我们假设了梁的抗弯刚度  $D$  在整个区间上是一个常数. 如果  $D$  是连续函数, 但不是常数 (例如变截面梁), 则只要在计算系数矩阵时把  $D$  放到积分号下即可:

$$a_{ij} = \int_0^a D \Phi'_i(x) \Phi'_j(x).$$

如果  $D$  是一个分段常数 (例如由几段不同材料组成的梁或一根梁可以分成几个不同的截面等等), 这时可将  $D$  的间断点作为结点, 分段取三次样条, 并在间断点上附加连续性条件, 同样可以得到系数矩阵.

对此我们稍加说明如下. 设

$$D = \begin{cases} D_1, & 0 \leq x \leq \xi, \\ D_2, & \xi < x \leq a, \end{cases}$$

$D_1 \neq D_2$ ,  $x = \xi$  是  $D$  的间断点. 边界条件如前.

在区间  $[0, \xi]$  中插入等分点:

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N_1} = \xi, \quad h_1 = \frac{\xi}{N_1},$$

$[0, \xi]$  上左端固支、右端自由的三次样条可表为

$$v_1(x) = \sum_{k=1}^{N_1+1} r_k \Phi_k(x).$$

同样, 在区间  $[\xi, a]$  中插入等分点:

$$\xi = x_{N_1} < x_{N_1+1} < \cdots < x_N = a, \quad h_2 = \frac{a - \xi}{N - N_1},$$

$[\xi, a]$  中两端自由的三次样条可表为

$$v_2(x) = \sum_{k=N_1-1}^{N+1} s_k \Psi_k(x).$$

由于区间  $[0, \xi]$  与  $[\xi, a]$  结点之间的等分距  $h_1$  与  $h_2$  不一定相同(最好取为相同), 所以, 基函数  $\Phi_k(x)$  与  $\Psi_k(x)$  形式可能不同.

这样, 在整个区间  $[0, a]$  上定义了一个分段三次样条

$$v(x) = \begin{cases} v_1(x) = \sum_{k=1}^{N_1+1} r_k \Phi_k(x), & 0 \leq x \leq \xi, \\ v_2(x) = \sum_{k=N_1-1}^{N+1} s_k \Psi_k(x), & \xi \leq x \leq a. \end{cases} \quad (2.8)$$

函数  $v(x)$  在区间  $[0, a]$  两端满足边界条件. 我们把它作为变分问题(2.5)的可取函数, 但必须在间断点  $x = \xi$  处附加两个连续性条件:

$$v_1(\xi) = v_2(\xi), \quad v_1'(\xi) = v_2'(\xi). \quad (2.9)$$

至于另一个连续性条件  $D_1 v_1''(\xi) = D_2 v_2''(\xi)$ , 它是变分问题(2.5)的自然间断条件, 象自然边界条件一样, 极值函数自动满足, 不必附加.

由(2.9)得到函数  $v_1(x)$  与  $v_2(x)$  的系数之间的关系式如下:

$$\begin{aligned} r_{N_1-1} + 4r_{N_1} + r_{N_1+1} &= s_{N_1-1} + 4s_{N_1} + s_{N_1+1}, \\ \frac{1}{h_1}(-r_{N_1-1} + r_{N_1+1}) &= \frac{1}{h_2}(-s_{N_1-1} + s_{N_1+1}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

由此解出

$$\begin{aligned} r_{N_1-1} &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{h_1}{h_2} \right) s_{N_1-1} + 2s_{N_1} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{h_1}{h_2} \right) s_{N_1+1} - 2r_{N_1}, \\ r_{N_1+1} &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{h_1}{h_2} \right) s_{N_1-1} + 2s_{N_1} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{h_1}{h_2} \right) s_{N_1+1} - 2r_{N_1}. \end{aligned}$$

再代入(2.8), 消去此二参数. 因此, 在全区间  $[0, a]$  上, 根据间断点的两个连续性条件,  $v(x)$  的参数个数由原来的  $N+4$  减为  $N+2$ , 比  $D$  没有间断点时的参数个数多一个.

也可以不先消去参数  $r_{N_1-1}$ ,  $r_{N_1+1}$ , 而是将关系式(2.10)作为求多元函数  $v_1(x)$  与  $v_2(x)$  (所有参数)极值问题的约束条件, 用 Lagrange 乘法, 这样计算上可能更简单些.

### § 3. 矩形板的弯曲

设有矩形薄板  $R(0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$ , 各向同性均质等厚度, 变形前的中性面取为  $z = 0$ . 坐标轴  $x, y, z$  成右手系. 令  $w = w(x, y)$  表示中性面上点  $(x, y)$  的横向位移,  $f(x, y)$  表示作用在板面上的横向载荷. 在小变形情况下, 板的应变能

$$J[w] = \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^a \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\}, \quad (3.1)$$

外功势能

$$F[w] = - \int_0^b \int_0^a f w, \quad ((3.2)$$

其中  $D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$  为板的抗弯刚度,  $h$  为板厚,  $\nu$  为 Poisson 比. 板的总势能

$$U[w] = J[w] + F[w].$$

对于边界条件, 我们假设每边只给出一种类型的约束, 如简支, 固支, 自由. 也可以是弹性支承, 这时必须在应变能与外功势能中加上相应于弹性能的项.

由最小势能原理, 平衡态位移使势能达到最小值

$$\text{Min}_{w \in H_2^2} U[w], \quad (3.3)$$

其中  $H_2^2$  是矩形  $R$  上具有有限能量并满足强加边界条件的函数集, 这里的强加边界条件跟一维梁相同.

现在用三次样条有限元解变分问题(3.3). 在  $x$  方向的区间  $[0, a]$  中插入等分点:

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = a, \quad h_x = \frac{a}{N}.$$

设  $[0, a]$  上以  $x_i = i h_x (i = 0, \cdots, N)$  为结点的三次样条的基函数为

$$V_x = \text{Span} \{ \Phi_i(x) \}_{i=-1, \dots, N+1}.$$

同样, 在  $y$  方向的区间  $[0, b]$  中插入等分点

$$0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_M = b, \quad h_y = \frac{b}{M}.$$

设  $[0, b]$  上以  $y_j = j h_y (j = 0, \cdots, M)$  为结点的三次样条的基函数为  $V_y = \text{Span} \{ \Psi_j(y) \}_{j=-1, \dots, M+1}$ , 则矩形  $R$  上双三次样条的基可表为两个一维基  $V_x$  与  $V_y$  的张量积:

$$V = V_x \otimes V_y = \text{Span} \{ \Phi_i(x) \Psi_j(y) \}_{i=-1, \dots, N+1, j=-1, \dots, M+1},$$

$V$  是一个  $(N+3)(M+3)$  维空间.

由假设, 矩形  $R$  的每条边界上只有一种类型的约束, 所以, 很容易在  $V$  中找出满足所有强加边界条件的子空间. 为此, 只要分别找出  $x$  方向与  $y$  方向相应的子空间, 再作张量积.

此外, 在工程中还有一种所谓四角点支的矩形板, 它的基为

$$V = V_x \otimes V_y = \text{Span} \{ \Phi_{-1}(x) \Psi_{-1}(y) - \Phi_{N+1}(x) \Psi_{M+1}(y) \},$$

$$V_x = \text{Span} \{ \Phi_i(x) \}_{i=-1, \dots, N+1}, \quad V_y = \text{Span} \{ \Psi_j(y) \}_{j=-1, \dots, M+1}.$$

我们先在四周不加约束的条件下将变分问题(3.3)离散化, 然后再加相应的边界条



件, 令

$$\omega(x, y) = \sum_{j=-1}^{M+1} \sum_{i=-1}^{N+1} r_{ij} \Phi_i(x) \Psi_j(y). \quad (3.4)$$

代入(3.3)得到代数方程组

$$\begin{aligned} D \sum_{j=-1}^{M+1} \sum_{i=-1}^{N+1} r_{ij} & \left\{ \int_0^a \Phi_i''(x) \Phi_k''(x) \int_0^b \Psi_j(y) \Psi_l(y) + \int_0^a \Phi_i(x) \Phi_k(x) \int_0^b \Psi_j''(y) \Psi_l''(y) \right. \\ & + \nu \left( \int_0^a \Phi_i''(x) \Phi_k(x) \int_0^b \Psi_j(y) \Psi_l''(y) + \int_0^a \Phi_i(x) \Phi_k'(x) \int_0^b \Psi_j''(y) \Psi_l(y) \right) \\ & \left. + 2(1-\nu) \int_0^a \Phi_i'(x) \Phi_k'(x) \int_0^b \Psi_j'(y) \Psi_l'(y) \right\} = f_{kl}, \quad \begin{matrix} k = -1, \dots, N+1, \\ l = -1, \dots, M+1, \end{matrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中  $f_{kl} = \int_0^b \int_0^a f(x, y) \Phi_k(x) \Psi_l(y)$ .

引入矩阵记号:

$$\begin{aligned} A_x &= \left( \int_0^a \Phi_i''(x) \Phi_k''(x) \right), & C_x &= \left( \int_0^a \Phi_i(x) \Phi_k''(x) \right), \\ D_x &= \left( \int_0^a \Phi_i'(x) \Phi_k'(x) \right), & F_x &= \left( \int_0^a \Phi_i(x) \Phi_k(x) \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

下标  $i, k = -1, \dots, N+1$ ;

$$\begin{aligned} A_y &= \left( \int_0^b \Psi_j''(y) \Psi_l''(y) \right), & C_y &= \left( \int_0^b \Psi_j(y) \Psi_l''(y) \right), \\ D_y &= \left( \int_0^b \Psi_j'(y) \Psi_l'(y) \right), & F_y &= \left( \int_0^b \Psi_j(y) \Psi_l(y) \right), \end{aligned}$$

下标  $j, l = -1, \dots, M+1$ ; 以及向量记号

$$\begin{aligned} r &= (r_{-1}, r_0, \dots, r_{M+1}), & r_l &= (r_{-1,l}, r_{0,l}, \dots, r_{N+1,l}); \\ f &= (f_{-1}, f_0, \dots, f_{M+1}), & f_l &= (f_{-1,l}, f_{0,l}, \dots, f_{N+1,l}), \end{aligned}$$

其中上标表示转置. 显然, 除了  $C_x$  与  $C_y$  外, 其余各矩阵都是对称的. 方程组(3.5)可以简写为矩阵形式

$$G r = f, \quad (3.7)$$

其中

$$G = D[F_y \otimes A_x + A_y \otimes F_x + \nu(C_y^T \otimes C_x + C_y \otimes C_x^T) + 2(1-\nu)D_y \otimes D_x], \quad (3.8)$$

记号  $A \otimes B$  表示矩阵  $A$  与  $B$  的 Kronecker 乘积:

$$A \otimes B = (a_{ij} B).$$

现在考察方程(3.7). 首先, 矩阵  $G$  为对称半正定(加上边界条件后一般成为正定). 又因为所有  $A_x, \dots, F_y$  都是带状矩阵, 半带宽等于 3, 所以  $G$  是一个分块带状矩阵, 分块半带宽为 3, 亦即令  $G = (G_{ij})_{i,j=-1, \dots, M+1}$ , 则  $G_{ij} = 0$  当  $|i-j| \geq 4$ . 同时每个子块  $G_{ij}$  本身又是一个带状矩阵, 半带宽等于 3, 所以, 矩阵  $G$  的每一行最多只有 49 个非零元素. 由此可见, 每个结点只与周围一个小方块内 48 个结点有关. 这个性质跟差分方程很相似, 不过现在的结点参数  $r_{ij}$  不是位移值  $\omega$  本身, 故方程(3.7)不是通常意义下的差分方程, 不可能由某一种差分格式导出.

下面写出(3.6)的各个矩阵的具体形式 ( $N \geq 4$ ):

$$A_x = h_x^{-3} \left( \int_0^a \Phi_i'(x) \Phi_k''(x) \right) \text{对称} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-11}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & & 0 \\ & \frac{32}{3} & \frac{-9}{2} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{6} & \\ & & \frac{9}{2} & \frac{-4}{3} & \frac{-1^{(*)}}{12} & \frac{1}{6} \\ & & & \frac{8}{3} & \frac{-3}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

当  $N = 4$  时,  
 $(*) = \frac{-1}{6}$ ;

$$C_x = h_x^{-1} \left( \int_0^a \Phi_i(x) \Phi_k''(x) \right) \text{对称} \begin{pmatrix} \frac{1}{30} & \frac{-23}{120} & \frac{19}{240} & \frac{1}{120} & & 0 \\ & \frac{17}{120} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{40} & \frac{1}{6} & \frac{1}{120} \\ & & \frac{-27}{40} & \frac{1}{30} & \frac{47^{(*)}}{240} & \frac{1}{120} \\ & & & \frac{-2}{3} & \frac{1}{8} & \frac{1}{5} \\ & & & & & \frac{1}{120} \end{pmatrix}$$

当  $N = 4$  时,  
 $(*) = \frac{23}{120}$ ;

$$D_x = h_x^{-1} \left( \int_0^a \Phi_i'(x) \Phi_k'(x) \right) \text{对称} \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{-17}{120} & \frac{-19}{240} & \frac{-1}{120} & & 0 \\ & \frac{2}{3} & \frac{1}{40} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{120} & \\ & & \frac{27}{40} & \frac{-1}{30} & \frac{-47^{(*)}}{240} & \frac{-1}{120} \\ & & & \frac{2}{3} & \frac{-1}{8} & \frac{-1}{5} \\ & & & & & \frac{-1}{120} \end{pmatrix}$$

当  $N = 4$  时,  
 $(*) = \frac{-23}{120}$ ;

除了头三个元素  $d_{-1,-1}$ ,  $d_{-1,0}$ ,  $d_{0,-1}$  外,其余各元素  $d_{ij} = -c_{ij}$ ;

$$F_x = h_x \left( \int_0^a \Phi_i(x) \Phi_k(x) \right) \text{对称} \begin{pmatrix} \frac{1}{252} & \frac{7}{720} & \frac{31}{10080} & \frac{1}{5040} & & 0 \\ & \frac{31}{315} & \frac{5}{48} & \frac{29}{1260} & \frac{1}{5040} & \\ & & \frac{183}{560} & \frac{283}{1260} & \frac{239^{(*)}}{10080} & \frac{1}{5040} \\ & & & \frac{151}{315} & \frac{397}{1680} & \frac{1}{42} \\ & & & & & \frac{1}{5040} \end{pmatrix}$$

当  $N = 4$  时,  
 $(*) = \frac{17}{720}$ .

以上各矩阵的末三行三列（相应于最后三个基函数）与前三行三列是对称的，没有写出。矩阵内的虚线表示从此行起到倒数第四行止各行形式不变，结构十分简单。

矩阵  $A_x, \dots, F_x$  的形式完全与此相同，只要将  $h_x$  改为  $h_y$ ,  $N$  改为  $M$ 。

至于边界条件处理，根据  $x = 0, a$  上的约束类型划去  $A_x, \dots, F_x$  的头几行几列及末几行几列，又根据  $y = 0, b$  上的约束类型划去  $A_y, \dots, F_y$  的头几行几列及末几行几列（划去的原则与一维梁情形相同），再将这些划去行列后的矩阵代入  $G$  的表示式 (3.8)。各种边界可以统一处理，灵活方便。

下面再对几种常用的外载荷给出右端项  $f_{kl}$  的具体形式：

1° 双线性载荷： $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$ （包括均布载荷  $\alpha = \beta = 0$ ）。

$$f_{kl} = \alpha \int_0^a x \Phi_k(x) \int_0^b \Psi_l(y) + \beta \int_0^a \Phi_k(x) \int_0^b y \Psi_l(y) + \gamma \int_0^a \Phi_k(x) \int_0^b \Psi_l(y),$$

$$\left( \int_0^a x \Phi_k(x) \right)_{k=-1,0,\dots,N+1} = h_x^2 \left( \frac{1}{120}, \frac{1}{5}, \frac{9}{10}, 2, 3, \dots, N-2, \right.$$

$$\left. \frac{3N}{4} - \frac{9}{10}, \frac{N}{3} - \frac{1}{5}, \frac{N}{24} - \frac{1}{120} \right),$$

$$\left( \int_0^a \Phi_k(x) \right)_{k=-1,0,\dots,N+1} = h_x \left( \frac{1}{24}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, 1, 1, \dots, 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{24} \right).$$

2° 集中载荷： $f(x, y) = \delta(x - \xi, y - \eta)$ ,  $f_{kl} = \Phi_k(\xi) \Psi_l(\eta)$ 。

如果载荷  $f(x, y)$  与边界条件具有某种对称性，例如均布，线性，中心集中力等，则可取  $1/2$  板或  $1/4$  板进行计算以节省工作量。这时对称线上的边界条件为一次导数等于 0。

$x$  方向左端自由、右端对称的三次样条基函数为

$$V_x = \text{Span} \left\{ \Phi_{-1}(x), \dots, \Phi_{N-2}(x), \varphi_3 \left( \frac{x}{h} - N + 1 \right) \right.$$

$$\left. + \varphi_3 \left( \frac{x}{h} - N - 1 \right), \varphi_3 \left( \frac{x}{h} - N \right) \right\},$$

共  $N + 2$  个。对于这组基，原来的矩阵  $A_x, \dots, F_x$  的形式要作相应的修改，去掉各个矩阵最后三行三列代以新的二行二列如下：

$$A_x = h_x^{-3} \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{8}{3} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{6} \\ & \frac{8}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\ & & \frac{8}{3} & -\frac{3}{2} \\ \text{对称} & & & \frac{4}{3} \end{pmatrix}, \quad C_x = h_x^{-1} \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{8} & \frac{1}{5} & \frac{1}{120} \\ & -\frac{2}{3} & \frac{2}{15} & \frac{1}{5} \\ & & -\frac{7}{15} & \frac{1}{8} \\ \text{对称} & & & -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$D_x = h_x^{-1} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{8} & \frac{-1}{5} & \frac{-1}{120} \\ & \frac{2}{3} & \frac{-2}{15} & \frac{-1}{5} \\ & & \frac{7}{15} & \frac{-1}{8} \\ & & & \frac{1}{3} \\ \text{对称} & & & & \end{pmatrix}, F_x = h_x \begin{pmatrix} \frac{151}{315} & \frac{397}{1680} & \frac{1}{42} & \frac{1}{5040} \\ & \frac{151}{315} & \frac{149}{630} & \frac{1}{42} \\ & & \frac{317}{630} & \frac{397}{1680} \\ & & & \frac{151}{630} \\ \text{对称} & & & & \end{pmatrix}.$$

此外还有

$$\int_0^a x \left[ \varphi_3\left(\frac{x}{h} - N + 1\right) + \varphi_3\left(\frac{x}{h} - N - 1\right) \right] = h_x^2 \left( N - 1 - \frac{1}{60} \right),$$

$$\int_0^a x \varphi_3\left(\frac{x}{h} - N\right) = h_x^2 \left( \frac{N}{2} - \frac{7}{30} \right), \int_0^a \left[ \varphi_3\left(\frac{x}{h} - N + 1\right) + \varphi_3\left(\frac{x}{h} - N - 1\right) \right] = h_x,$$

$$\int_0^a \varphi_3\left(\frac{x}{h} - N\right) = \frac{1}{2} h_x.$$

从代数方程组(3.5)或(3.7)解出结点参数  $r_{ij}$  后代入(3.4),得到位移近似解  $w(x, y)$ . 由于 B 样条  $\Phi_i(x)$  与  $\Psi_j(y)$  的紧凑性,对任一点  $(x, y)$ , 两重求和中实际上最多只含有 16 项(非结点)或 9 项(结点). 如要求转角或弯矩,只要对  $w$  微分,再求相应的两重和式的值. 由于  $w \in C_2(R)$ , 各点弯矩都是连续的,用不着象有限元法中由于结点上弯矩不连续而采用取相邻结点弯矩平均值的办法处理.

与双三次 Hermite 矩形元相比,样条有限元每个结点一个参数,系数矩阵半带宽约  $3N$ (方板),而 Hermite 元每个结点 4 个参数,总刚度矩阵半带宽约  $4N$ . 因此,在相同的分格下,三次样条有限元与 Hermite 元工作量之比约为 1:4,而两者的精度为同一数量级:  $J[w^* - w_h] = O(h^4)$ , 这里  $w^*$  为真解,  $w_h$  为依赖于分格  $h$  的近似解. 双三次 Hermite 元是一个协调元,在板元中有较高的精度,被认为是矩形区域上最好的板元之一. 显然,对于矩形区域,三次样条有限元远胜过 Hermite 元.

现在我们来考察自然边界条件对变分问题解的影响,以四边简支矩形板为例说明之. 我们知道,简支边有二个边界条件,一个位移为 0,这是强加边界条件;一个弯矩为 0,这是自然边界条件,在变分问题中不必列出,极值函数自动满足. 然而,如果所取的基函数不仅满足位移为 0 的强加边界条件,而且也满足弯矩为 0 的自然边界条件,那末由此得到的近似解是否会更好些呢? [3]中对二阶常微分方程曾提到过这个问题,并猜想其影响是微小的.

我们对四边简支方板,用满足以及不满足弯矩为 0 的两组基函数分别进行了计算,数值结果表明(见表 1 及说明),满足自然边界条件不见得能提高解的精度. 在粗分格情况下,方板中心挠度及角点扭矩反而不及不满足自然边界条件的解,弯矩略有改善,二者差别极其微小. 当分格加密时,两种方案的计算结果迅速接近.

在某些关于有限元的工程文献中,特别是对高次元,往往设法去凑合,使其满足自然边界条件,以为这样做能提高解的精度,给计算工作带来许多麻烦. 上面的例子说明,实

实际上这是完全不必要的。从理论上说,加上自然边界条件,相当于在变分问题的原可取函数集的一个子集中求能量的最小值,在有限个基函数的情况下,从能量的意义上结果自然要差一些。

以下是满足弯矩为 0 的四周简支矩形板的三次样条基函数:

$$\begin{aligned}
 V_x = \text{Span} \left\{ \varphi_3 \left( \frac{x}{h_x} - 1 \right) - \varphi_3 \left( \frac{x}{h_x} + 1 \right), \Phi_2(x), \dots, \right. \\
 \left. \Phi_{N-2}(x), \varphi_3 \left( \frac{x}{h_x} - N + 1 \right) - \varphi_3 \left( \frac{x}{h_x} - N - 1 \right) \right\}, \\
 V_y = \text{Span} \left\{ \varphi_3 \left( \frac{y}{h_y} - 1 \right) - \varphi_3 \left( \frac{y}{h_y} + 1 \right), \Psi_2(y), \dots, \Psi_{M-2}(y), \right. \\
 \left. \varphi_3 \left( \frac{y}{h_y} - M + 1 \right) - \varphi_3 \left( \frac{y}{h_y} - M - 1 \right) \right\}, \quad V = V_x \otimes V_y. \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

在上面的讨论中,假设了抗弯刚度  $D$  是常数。如果  $D$  是连续函数,但不是常数,或者  $D$  是片常数,则可以参照 § 2 一维梁的相应情况处理。对于正交异性板也可用类似的方法处理。

如果薄板不是矩形,而是由几个矩形构成的区域,则只要将整个区域分成若干个矩形,在每个矩形上用三次样条构造一个满足该矩形边界条件的  $C_2$  类函数(矩形之间的公共边当作自由边),然后再在公共边上要求满足位移连续条件,这样得到的函数在每个矩形上属于  $C_2$ ,但在整个区域上属于  $C_0$ 。

我们用三次样条有限元计算了矩形板的各种典型问题,兹举四例如下。

### 例 3.1. 四周简支方板。

由于对称性,只取 1/4 板进行计算。解代数方程组用的是共轭斜量法,不存储系数矩阵。对于四周简支(或固支), $n$  阶矩阵一般只要迭代  $n/3$  次即可达到相当高的精度( $10^{-7}$ )。对于二对边简支二对边自由情况,约需  $n/2$  次迭代。对悬臂板(三边自由,一边固支),约需  $5/4n$  次迭代。这反映了各种边界约束对系数矩阵条件数的影响。

表 1. 四周简支方板:  $\nu = 0.3, L = \text{边长}$

分格	自由度	均 布 载 荷 $P$				中 心 集 中 载 荷 $Q$		
		板 中 心		角 点	ACM 元	板 中 心	角 点	ACM 元
		$DW/PL^4$	$Mx/PL^2$	$Mxy/PL^2$	$DW/PL^4$ 板中心	$DW/QL^2$	$Mxy/Q$	$DW/QL^2$ 板中心
4×4	9	0.00406447 (0.00406554)	0.048627 (0.047868)	0.032727 (0.030306)	0.003939 [12]	0.0114375 (0.0114291)	0.062351 (0.062759)	0.012327
8×8	25	0.00406251 (0.00406253)	0.048137 (0.048122)	0.032545 (0.031914)	0.004033 [48]	0.0115591 (0.0115590)	0.061042 (0.061001)	0.011829
16×16	81	0.00406236 (0.00406236)	0.047950 (0.047950)	0.032498 (0.032339)	0.004056 [192]	0.0115904 (0.0115904)	0.060953 (0.060954)	0.011671
精 确 解		0.00406236	0.047886	0.032482	0.00406236	0.0116008	0.060953	0.0116008

说明: 1° 圆括号 ( ) 中数据按满足自然边界条件的简支边基函数(3.9)算出。

2° ACM 元的数据取自 [2], 数据下面的方括号 [ ] 中数字表示该元的自由度,下同。

3° 精确解的数据取自 D. S. Watkins, *Int. J. Numer. Methods in Engineering*, Vol 10, 1976, 925-933.

## 例 3.2. 四周固支方板.

表 2. 四周固支方板:  $\nu = 0.3$ ,  $L =$  边长.

分格	自由度	均 布 载 荷 $P$				中 心 集 中 载 荷 $Q$		
		板 中 心		边 中 点		板 中 心	边 中 点	$ACM$
		$DW/PL^4$	$M_x/PL^2$	$M_x/PL^2$	$DW/PL^4$	$DW/QL^2$	$M_x/Q$	$DW/QL^2$
$4 \times 4$	4	0.00126114	0.0237314	-0.0422797	0.001403 [8]	0.00543101	-0.105466	0.006134
$8 \times 8$	16	0.00126515	0.0232882	-0.0482704	0.001304 [40]	0.00556983	-0.119640	0.005803
$16 \times 16$	64	0.00126531	0.0230051	-0.0506410	0.001275 [176]	0.00560157	-0.124182	0.005672
$24 \times 24$	144	0.00126532	0.0229498	-0.0510201		0.00560739	-0.125037	
精 确 解		0.00126532	0.0229051	-0.0513338	0.00126532	0.0056120	-0.12577	0.0056120

说明: 与表 1 说明中的  $2^\circ$  和  $3^\circ$  相同.

## 例 3.3. 四角点支方板.

表 3. 四角点支方板:  $\nu = 0.2$ ,  $L =$  边长.

分 格	均 布 载 荷 $P$				中 心 集 中 载 荷 $Q$		
	板 中 心		边 中 点		板 中 心	边 中 点	
	$DW/PL^4$	$M_x/PL^2$	$DW/PL^4$	$M_x/PL^2$	$DW/QL^2$	$DW/QL^2$	$M_x/Q$
$4 \times 4$	0.025744 (0.0232)	0.11684 (0.103)	0.017266 (0.0165)	0.15808 (0.149)	0.040058	0.022705	0.22139
$8 \times 8$	0.025748	0.11149	0.017272	0.15493	0.040176	0.022701	0.21354
$16 \times 16$	0.025949	0.11019	0.017273	0.15396	0.040208	0.022701	0.21150
差分解	0.0281	0.110	0.0180	0.154			
实验值	0.0265	0.109	0.0170	0.140			

说明:  $1^\circ$  圆括号 ( ) 中数据(用有限元法算出)以及差分解和实验值均取自 [2]. $2^\circ$  解代数方程组用的是直接法. $3^\circ$  本例以及前二例都用双三次 Hermite 元计算过, 所得结果前 4 位数字均与三次样条有限元相同, 故未列出.

## 例 3.4. 弹性地基板.

样条有限元可以用来分析弹性地基板, 只要在板的应变能中增加一项弹性能

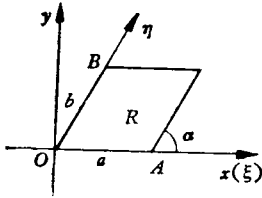
$$1/2 \iint_A k_0 w^2, \quad k_0 \text{ 为 Winker 地基系数.}$$

表 4. 弹性地基方板\*): 边长  $L = 5 M$ , 板厚  $h = 0.5 M$ ,  $\nu = 0.35$ ,  
 $E = 2.6 \times 10^6$ ,  $k_0 = 5000$ , 中心集中载荷  $Q = 100 T$ .

分 格	自 由 度	板 中 心 地 基 反 力 $T/M^2$	
		三 次 样 条	差 分 法
4×4	16	6.2504	7.1289
6×6	25	6.2878	6.7772
8×8	36	6.3012	6.6142
10×10	49	6.3074	6.5241
12×12	64	6.3107	6.4730
14×14	81	6.3127	6.4384

\*) 这个例子的数据,是北京石化总厂刘应尘同志计算的.

#### § 4. 菱形板及其他



上节所述方法可以应用于菱形板或其他一些弹性体。  
 设在  $(x, y)$  平面上有菱形板  $R$ , 倾角为  $\alpha$  (当  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  时就是矩形), 承受横向载荷  $f(x, y)$ . 板的总势能

$$U[w] = \frac{D}{2} \iint_R \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} - \iint_R f w. \quad (4.1)$$

引入斜交坐标  $(\xi, \eta)$ :

$$\begin{cases} x = \xi + \eta \cos \alpha, \\ y = \eta \sin \alpha. \end{cases} \quad (4.2)$$

$(x, y)$  平面的菱形  $R$  变为  $(\xi, \eta)$  平面的矩形  $R'$  ( $0 \leq \xi \leq a, 0 \leq \eta \leq b$ ). 容易验证, 在新坐标  $(\xi, \eta)$  下, 势能(4.1)取如下形式:

$$\begin{aligned} U[w] = & \frac{D}{2 \sin^3 \alpha} \int_0^b \int_0^a \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 - 2 \sin^2 \alpha (1 - \nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 \right] \right\} - \sin \alpha \int_0^b \int_0^a f(\xi + \eta \cos \alpha, \eta \sin \alpha) w. \end{aligned} \quad (4.3)$$

至于边界条件, 不难看出, 菱形  $R$  的固支边  $\Gamma$  的两个条件  $w|_{\Gamma} = 0, \frac{\partial w}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$  ( $n$  是  $\Gamma$  的外法向), 经过坐标变换, 变为矩形  $R'$  的相应边界  $\Gamma'$  上的二个条件  $w|_{\Gamma'} = 0, \frac{\partial w}{\partial n'}|_{\Gamma'} = 0$  ( $n'$  为  $\Gamma'$  的外法向). 因此, 经过坐标变换, 固支边界条件形式保持不变. 但是简支边界条件的形式却要发生改变. 例如, 设  $OB$  为  $R$  的简支边, 则在  $OB$  上有  $w = 0, \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ . 经过坐标变换,  $OB$  变为  $OB'$  ( $\xi = 0, 0 \leq \eta \leq b$ ), 而

$$\Delta w = \left( 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}.$$

因为在  $OB'$  上有  $w = 0$ , 所以  $\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \Big|_{OB'} = 0$ , 但  $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \Big|_{OB'}$  不一定等于 0. 因此,  $OB'$  上的边界条件形式为  $w = 0, \left(1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = 0$  而不是  $w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0$ . 然而, 简支边的第二个条件弯矩为 0 是自然边界条件, 变分问题中不必考虑, 因此在边界  $OB'$  上, 边界条件  $\left(1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = 0$  也不必考虑(如用差分方法, 这个边界条件就必须考虑). 这样, 在矩形  $R'$  的边界上仍只要考虑二类通常的强加边界条件  $w = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0$ .

因此, 菱形板的变分问题(4.1)变为矩形区域上的一个变分问题(4.3), 只不过能量表达式比通常的矩形板稍复杂一些而已.

我们仍用三次样条有限元求(4.3)的最小值, 所有记号与步骤均与 § 3 相同. 令

$$w(\xi, \eta) = \sum_{i=-1}^{M+1} \sum_{j=-1}^{N+1} r_{ij} \Phi_i(\xi) \Psi_j(\eta), \quad (4.4)$$

代入(4.3)再对  $r_{ij}$  求极值, 得到代数方程组:

$$\begin{aligned} & \frac{D}{\sin^4 \alpha} \sum_{j=-1}^{M+1} \sum_{i=-1}^{N+1} r_{ij} \left\{ \int_0^a \Phi_i''(\xi) \Phi_k''(\eta) \int_0^b \Psi_j(\eta) \Psi_l(\eta) + \int_0^a \Phi_i(\xi) \Phi_k(\xi) \int_0^b \Psi_j''(\eta) \Psi_l''(\eta) \right. \\ & - 2 \cos \alpha \left( \int_0^a \Phi_i'(\xi) \Phi_k''(\xi) \int_0^b \Psi_j'(\eta) \Psi_l(\eta) + \int_0^a \Phi_i(\xi) \Phi_k'(\xi) \int_0^b \Psi_j''(\eta) \Psi_l'(\eta) \right) \\ & + \int_0^a \Phi_i''(\xi) \Phi_k'(\xi) \int_0^b \Psi_j(\eta) \Psi_l'(\eta) + \int_0^a \Phi_i'(\xi) \Phi_k(\xi) \int_0^b \Psi_j'(\eta) \Psi_l''(\eta) \\ & + (\nu \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \left( \int_0^a \Phi_i''(\xi) \Phi_k(\xi) \int_0^b \Psi_j(\eta) \Psi_l''(\eta) + \int_0^a \Phi_i(\xi) \Phi_k''(\xi) \right. \\ & \cdot \left. \int_0^b \Psi_j''(\eta) \Psi_l(\eta) \right) + 2(1 - \nu \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \int_0^a \Phi_i'(\xi) \Phi_k'(\xi) \int_0^b \Psi_j'(\eta) \Psi_l'(\eta) \Big\} = f_{kl}, \\ & \qquad \qquad \qquad k = -1, \dots, N+1, \\ & \qquad \qquad \qquad l = -1, \dots, M+1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

这里比矩形板多了一些包含积分  $\int_0^a \Phi_i'(\xi) \Phi_k''(\xi)$  及  $\int_0^a \Phi_i(\xi) \Phi_k'(\xi)$  的项. 令矩阵

$$B_\xi = \left( \int_0^a \Phi_i'(\xi) \Phi_k''(\xi) \right)_{i,k=-1,\dots,N+1}, \quad E_\xi = \left( \int_0^a \Phi_i(\xi) \Phi_k'(\xi) \right)_{i,k=-1,\dots,N+1},$$

方程(4.5)可简写为

$$\begin{aligned} & \frac{D}{\sin^4 \alpha} \left\{ F_\eta \otimes A_\xi + A_\eta \otimes F_\xi - 2 \cos \alpha (E_\eta \otimes B_\xi^\top + B_\eta \otimes E_\xi^\top + E_\eta^\top \otimes B_\xi \right. \\ & \quad \left. + B_\eta^\top \otimes E_\xi) + (\nu \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) (C_\eta^\top \otimes C_\xi + C_\eta \otimes C_\xi^\top) \right. \\ & \quad \left. + 2(1 - \nu \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) D_\eta \otimes D_\xi \right\} r = f, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$B_\xi$  与  $E_\xi$  的具体形式为



$$B_\xi = h \bar{\xi}^2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{8} & \frac{17}{24} & \frac{-13}{48} & \frac{-1}{24} & & & & & & & 0 \\ & \frac{7}{24} & -2 & \frac{35}{24} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{24} & & & & & \\ & & & 0 & \frac{11}{12} & \frac{-5(*)}{16} & \frac{-1}{24} & & & & \\ \text{反对称} & & & & 0 & \frac{19}{24} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{24} & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \end{pmatrix} \quad \text{当 } N = 4 \text{ 时,}$$

$$(*) = \frac{-7}{24}$$

$$E_\xi = \begin{pmatrix} \frac{-1}{72} & \frac{31}{720} & \frac{5}{288} & \frac{1}{720} & & & & & & & 0 \\ & 0 & \frac{133}{720} & \frac{13}{180} & \frac{1}{720} & & & & & & \\ & & 0 & \frac{109}{360} & \frac{37(*)}{480} & \frac{1}{720} & & & & & \\ \text{反对称} & & & 0 & \frac{49}{144} & \frac{7}{90} & \frac{1}{720} & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \end{pmatrix} \quad \text{当 } N = 4 \text{ 时,}$$

$$(*) = \frac{11}{144}$$

由(4.6)解出  $r_{ij}$ , 代入(4.4), 得到位移  $w(\xi, \eta)$ .  $(x, y)$  平面上的弯矩计算公式为

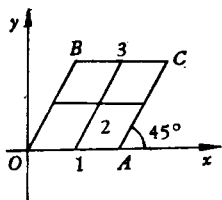
$$M_x = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\nu}{\sin^2 \alpha} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) \right],$$

$$M_y = -D \left[ \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) \right],$$

$$M_{xy} = -\frac{E h^3}{12(1 + \nu)} \frac{1}{\sin \alpha} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} - \cos \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right).$$

除菱形板外,其他如矩形底的双曲扁壳、圆柱壳以及考虑横向剪切影响的矩形Reissner板或夹层板都可应用样条有限元,计算工作量少而精度高。特别是壳体,通常有限元法每个结点起码要用 9 个以上参数,有的甚至在十几个以上,工作量很大。如能适合用样条有限元,则每个结点只有三个参数。

一般说,如果经过坐标变换能做到以下二点: 1° 求解区域是矩形; 2° 每条边界上只有一种类型的约束(函数或其导数为 0), 则写出经过坐标变换后的能量表达式就可应用样条有限元。



我们用以上方法计算过各种边界条件的菱形板的弯曲(倾角  $\alpha \geq 30^\circ$ ), 举一例如下。

例 4.1. 斜板桥。

二对边  $OB$  与  $AC$  简支, 二对边  $OA$  与  $BC$  自由,  $OA = OB = L$ , 倾角  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\nu = 0.3$ , 中心集中力  $Q$ 。

表 5. 斜板桥 (中心集中载荷)

分 格	点 2			点 1 与 3		
	$DW/QL^2$	$M_{\max}/Q$	$M_{\min}/Q$	$DW/QL^2$	$M_{\max}/Q$	$M_{\min}/Q$
4×4	0.01011	0.3354	0.1648	0.00788	0.0711	-0.0446
6×6	0.01048	0.3789	0.2049	0.00791	0.0676	-0.0122
8×8	0.01063	0.4098	0.2347	0.00796	0.0695	-0.0138
有 限 元	6×6	0.0103	0.393		0.0913	
	12×12	0.0106	0.443		0.0903	
差分解	0.0117	0.370	0.257			
实验值	0.099	0.384	0.200			

说明. 1°  $M_{\max}$  与  $M_{\min}$  表示一点的二个主弯矩.

2° 有限元以及差分解与实验值数据取自 J. H. Argyris, *Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech.*, 1965, 11-190.

## § 5. 板梁组合结构

以上几节讨论的都是单个构件, 现在我们考虑用样条有限元分析由矩形板以及平行于板边的正交梁系组成的组合结构.

先考虑最简单的情形, 即四周只有一条边梁的矩形板. 设矩形板  $R$  的坐标为  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ , 沿  $x$  轴向边界上有一条边梁  $y = 0$ , 边梁和板刚接.

设板中面三个方向位移  $R_p = (u^{(p)}, v^{(p)}, w^{(p)})^T$ , 外载荷  $f = (f_x, f_y, f_z)^T$ . 下面写出这个结构的能量, 先写板的能量.

1° 弯曲应变能:

$$I_b[w^{(p)}] = \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^a \left\{ \left( \frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\}, \quad (5.1)$$

2° 拉伸应变能:

$$I_s[u^{(p)}, v^{(p)}] = \frac{D_1}{2} \int_0^b \int_0^a \left\{ \left( \frac{\partial u^{(p)}}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial u^{(p)}}{\partial x} \frac{\partial v^{(p)}}{\partial y} + \left( \frac{\partial v^{(p)}}{\partial y} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial u^{(p)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(p)}}{\partial x} \right)^2 \right\}, \quad (5.2)$$

其中  $D_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2}$  为板的抗拉刚度.

再写梁的能量. 设梁的中性轴上三个方向位移为  $R_s = (u^{(s)}, v^{(s)}, w^{(s)})^T$ , 则

1°  $x$  向拉伸应变能:

$$J_s[u^{(s)}] = \frac{1}{2} \int_0^a E_s A_s \left( \frac{du^{(s)}}{dx} \right)^2; \quad (5.3)$$

2°  $z$  向与  $y$  向弯曲应变能:

$$J_b[v^{(s)}, w^{(s)}] = \frac{1}{2} \int_0^a E_s \left[ I_y \left( \frac{d^2 w^{(s)}}{dx^2} \right)^2 + I_z \left( \frac{d^2 v^{(s)}}{dx^2} \right)^2 \right], \quad (5.4)$$

其中  $E_s$  为弹性模量,  $A_s$  为断面积,  $I_y$  与  $I_z$  为断面绕  $y$  轴与  $z$  轴的惯矩, 并假设惯性积  $I_{yz} = 0$ , 即  $y$  轴与  $z$  轴和梁的主轴重合. 在板梁组合结构中, 梁一般只起着加强板的抗拉弯能力的作用(加筋板), 主要受力方向通常与板面垂直, 这时梁在  $y$  方向的弯曲跟  $x$  向拉伸与  $z$  向弯曲相比是一高阶小量, 可以忽略不计, 所以

$$J_b[w^{(s)}] = \frac{1}{2} \int_0^a E_s I_y \left( \frac{d^2 w^{(s)}}{dx^2} \right)^2. \quad (5.5)$$

以下就按此简化方案分析.

3° 绕  $x$  轴的扭转应变能:

$$J_t[\omega_1] = \frac{1}{2} \int_0^a GP \left( \frac{d\omega_1}{dx} \right)^2, \quad (5.6)$$

其中  $\omega_1$  为绕  $x$  轴的转角,  $GP$  为断面的抗扭刚度,  $G$  为剪切模量.

因为梁和板是刚接的, 在小变形情况下, 可以将梁的中性轴上任一点  $Q$  的位移  $R_s(Q)$  按刚体运动公式转换成板的中性面上  $O$  点的位移  $R_p(O)$ :

$$R_s(Q) = R_p(O) + \Omega \times D, \quad (5.7)$$

其中  $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$  为  $Q$  点(同时也是  $O$  点)绕  $x, y, z$  轴的三个转角,  $D = (d_x, d_y, d_z)^T$  是点  $O$  到点  $Q$  的距离向量. 特别, 当点  $Q$  与  $O$  具有相同的  $x$  轴与  $y$  轴坐标时, 我们有

$D = (0, 0, d_z)$ ,  $d_z = \frac{h+t}{2}$ ,  $t$  为梁高,  $h$  为板厚. 此外, 对板来说, 绕  $x$  轴的转角  $\omega_1 = \frac{\partial w^{(p)}}{\partial y}$ , 绕  $y$  轴的转角  $\omega_2 = -\frac{\partial w^{(p)}}{\partial x}$ , 所以, 由 (5.7) 得  $R_s(Q)$  与  $R_p(O)$  之间的转换关系式:

$$\begin{cases} u^{(s)} = u^{(p)} - d_z \frac{\partial w^{(p)}}{\partial x}, \\ v^{(s)} = v^{(p)} - d_z \frac{\partial w^{(p)}}{\partial y}, \\ w^{(s)} = w^{(p)}. \end{cases} \quad (5.8)$$

将 (5.8) 代入梁的各种应变能表示式 (5.3), (5.5), (5.6) 中得

$$J_s[u^{(p)}] = \frac{1}{2} \int_0^a E_s A_s \left( \frac{\partial u^{(p)}}{\partial x} - d_z \frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x^2} \right)_{y=0}^2, \quad (5.9)$$

$$J_b[w^{(p)}] = \frac{1}{2} \int_0^a E_s I_y \left( \frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x^2} \right)_{y=0}^2, \quad (5.10)$$

$$J_t[w^{(p)}] = \frac{1}{2} \int_0^a GP \left( \frac{\partial w^{(p)}}{\partial x \partial y} \right)_{y=0}^2. \quad (5.11)$$

将板和梁的应变能加在一起, 再加上外功势能, 我们得到用板的中性面上位移表示的结构的总能量

$$\begin{aligned} U[u^{(p)}, v^{(p)}, w^{(p)}] &= J_b[w^{(p)}] + J_s[u^{(p)}, v^{(p)}] + J_t[w^{(p)}] + J_b[w^{(p)}] \\ &+ J_t[w^{(p)}] - \int_0^b \int_0^a (f_x u^{(p)} + f_y v^{(p)} + f_z w^{(p)}). \end{aligned} \quad (5.12)$$

有了能量表达式后, 就可根据最小势能原理, 用样条有限元解此问题. 为了简单起见, 将位移分量右上角标号  $p$  略去, 只要记住, 得到的近似解是板中面上的位移. 如要求梁的中性轴上的位移, 则可应用转换公式 (5.8).

现在我们有三个位移分量  $u, v, w$ , 每个分量可以有自已的边界条件. 对于变分问题来说,  $u$  或  $v$  的强加边界条件只有一种:  $u = 0$  或  $v = 0$ ,  $w$  的强加边界条件跟以前一样:  $1^\circ w = 0$  (简支),  $2^\circ w = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0$  (固支).

令

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=-1}^{M+1} \sum_{i=-1}^{N+1} a_{ij} \Phi_i(x) \Psi_j(y), & v &= \sum_{j=-1}^{M+1} \sum_{i=-1}^{N+1} b_{ij} \Phi_i(x) \bar{\Psi}_j(y), \\ w &= \sum_{j=-1}^{M+1} \sum_{i=-1}^{N+1} c_{ij} \Phi_i(x) \Psi_j(y), \end{aligned} \quad (5.13)$$

代入板的各项应变能中. 记向量

$$A = (A_{-1}^T, \dots, A_{M+1}^T)^T, \quad A_j = (a_{-1,j}, \dots, a_{N+1,j}), \dots,$$

等等, 容易验证

$$I_s[u, v] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} G_{s1} & G_{s2} \\ G_{s2}^T & G_{s3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

其中

$$G_{s1} = D_1 \left( F_y \otimes D_x + \frac{1-\nu}{2} D_y \otimes F_x \right), \quad G_{s2} = D_1 \left( \nu E_y^T \otimes E_x + \frac{1-\nu}{2} E_y \otimes E_x^T \right),$$

$$G_{s3} = D_1 \left( D_y \otimes F_x + \frac{1-\nu}{2} F_y \otimes D_x \right).$$

$$I_b[w] = \frac{1}{2} C^T G_b C, \quad (5.15)$$

其中

$$G_b = D [F_y \otimes A_x + A_y \otimes F_x + \nu (C_y^T \otimes C_x + C_y \otimes C_x^T) + 2(1-\nu) D_y \otimes D_x].$$

这里所有矩阵记号  $A_x, \dots, F_y$  均与 § 3 同. (5.14) 式也就是用三次样条有限元解平面问题的计算公式.

将板的二项应变能(5.14)与(5.15)加在一起得

$$I = I_s[u, v] + I_b[w] = \frac{1}{2} R^T K_p R, \quad (5.16)$$

其中

$$K_p = \begin{pmatrix} G_{s1} & G_{s2} & 0 \\ G_{s2}^T & G_{s3} & 0 \\ 0 & 0 & G_b \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

现在将梁的应变能离散化. 因为在  $x$  向边梁上有  $y = 0$ , 所以, 令(5.13)中的  $y = 0$  得

$$u = u(x, 0) = \sum_{j=-1}^{M+1} \sum_{i=-1}^{N+1} a_{ij} \Phi_i(x) \Psi_j(0), \quad v = v(x, 0) = \sum_{j=-1}^{M+1} \sum_{i=-1}^{N+1} b_{ij} \Phi_i(x) \Psi_j(0), \quad (5.18)$$

$$w = w(x, 0) = \sum_{j=-1}^{M+1} \sum_{i=-1}^{N+1} c_{ij} \Phi_i(x) \Psi_j(0), \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right|_{y=0} = \sum_{j=-1}^{M+1} \sum_{i=-1}^{N+1} c_{ij} \Phi_i'(x) \Psi_j'(0).$$

将此四式代入梁的各项应变能中, 得到

$$J_s[u] = \frac{1}{2} \left[ A^T H_s A - \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & H_{s2} \\ H_{s2}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} + C^T H_s C \right], \quad (5.19)$$

其中

$$\begin{aligned} H_{s_1} &= (E, A_s) F_y(0) \otimes D_x, \quad H_{s_2} = (E, A_s, d_x) F_y(0) \otimes B_x^\top, \\ H_{s_3} &= (E, A_s, d_x^2) F_y(0) \otimes A_x, \end{aligned}$$

而矩阵

$$F_y(0) = (\Psi_j(0) \Psi_l(0))_{j,l=-1,\dots,M+1} = \begin{pmatrix} \Psi_{-1}^2(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_{-1}^2(0) = \frac{1}{36},$$

$$J_b[w] = \frac{1}{2} C^\top H_b C, \quad (5.20)$$

其中

$$\begin{aligned} H_b &= (E, I_y) F_y(0) \otimes A_x, \\ J_l[w] &= \frac{1}{2} C^\top H_l C, \end{aligned} \quad (5.21)$$

其中

$$H_l = (GP) D_y(0) \otimes D_x,$$

而矩阵

$$D_y(0) = (\Psi'_j(0) \Psi'_l(0))_{j,l=-1,\dots,M+1} = \begin{pmatrix} \Psi'_{-1}(0) & \Psi'_{-1}(0) \Psi'_0(0) & 0 & \cdots & 0 \\ \Psi'_0(0) \Psi'_{-1}(0) & \Psi'^2_0(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi'_{-1}(0) = -\frac{1}{2} h_y^{-1}, \quad \Psi'_0(0) = 2h_y^{-1}.$$

将梁的三项应变能(5.19),(5.20),(5.21)加在一起得

$$J = J_s[u] + J_b[w] + J_l[w] = \frac{1}{2} R^\top K R, \quad (5.22)$$

其中

$$K = \begin{pmatrix} H_{s_1} & 0 & -H_{s_2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -H_{s_2}^\top & 0 & H_{s_1} + H_b + H_l \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

整个结构的总能量(5.12)离散为

$$U[u, v, w] = \frac{1}{2} R^\top K R - R^\top F, \quad (5.24)$$

其中

$$K = K_p + K_s, \quad F = (F_u, F_v, F_w)^\top, \quad F_u = (F_{u,-1}, \dots, F_{u,M+1}),$$

$$F_{u,j} = (f_{x-1,j}, f_{x,0,j}, \dots, f_{x,N+1,j}), \quad f_{x,ij} = \int_0^b \int_0^a f_x \Phi_i(x) \Psi_j(y),$$

等等.

根据最小势能原理,由(5.24)得代数方程组

$$KR = F. \quad (5.25)$$

最后,再根据  $u, v, w$  的边界条件,对(5.25)的系数矩阵  $K$  进行处理. 凡是向量  $R$  中的某个分量,根据边界条件应等于 0,则将  $K$  中相应的行与列的非对角元素置 0,右端  $F$  中的相应分量也置 0,再解方程(5.27). 也可以从一开始在(5.13)式中就把边界条件考虑在内,这样能减少一些工作量与存储,程序上可能稍复杂些. 这两种处理边界条件的办法跟有限元法相同.

我们从  $x$  轴向边梁 ( $y = 0$ ) 的系数矩阵  $K_i$  的表示式中可以看出,与梁的位置  $y = 0$  有关的项,只出现在矩阵  $H_{s_1}, H_{s_2}, H_{s_3}$  以及  $H_b, H_t$  中所包含的  $F_y(0)$  与  $D_y(0)$  两处. 因此,如果我们考虑的不是边梁  $y = 0$ ,而是某一条平行于  $x$  轴的梁  $y = \eta$ ,则只要把矩阵  $F_y(0), D_y(0)$  换为  $F_y(\eta), D_y(\eta)$ ,按照同一计算格式就可得到梁  $y = \eta$  的能量矩阵.  $F_y(\eta)$  与  $D_y(\eta)$  也是一些特殊形式的矩阵,最多只有 16 个 ( $\eta$  非  $y$  向结点)或 9 个 ( $\eta$  为  $y$  向结点)非零元素,分布在相邻的 4 个或 3 个对角元素两侧,形成一个  $4 \times 4$  或  $3 \times 3$  的小矩阵.

再来考察一下(5.25)的系数矩阵  $K$  的组成.

令

$$K = \begin{pmatrix} K_{AA} & K_{AB} & K_{AC} \\ & K_{BB} & K_{BC} \\ \text{对称} & & K_{CC} \end{pmatrix},$$

则

$$K_{AA} = G_{s_1} + H_{s_1} = (D_1 F_y + E_s A_s F_y(\eta)) \otimes D_x + D_1 \frac{1-\nu}{2} D_y \otimes F_x,$$

$$K_{AB} = G_{s_2} = D_1 \left( \nu E_y^\top \otimes E_x + \frac{1-\nu}{2} E_y \otimes E_x^\top \right),$$

$$K_{AC} = -H_{s_3} = -(E_s A_s d_z) F_y(\eta) \otimes B_x^\top,$$

$$K_{BB} = G_{s_3} = D_1 \left( D_y \otimes F_x + \frac{1-\nu}{2} F_y \otimes D_x \right),$$

$$K_{BC} = 0,$$

$$K_{CC} = G_b + H_{s_4} + H_b + H_t = [DF_y + (E_s A_s d_z^2 + E_s I_y) F_y(\eta)] \otimes A_x$$

$$+ DA_y \otimes F_x + \nu D (C_y^\top \otimes C_x + C_y \otimes C_x^\top) + [2D(1-\nu)D_y + (GP)D_y(\eta)] \otimes D_x.$$

由此可见,除了  $K_{AC}$  外,其余各子矩阵都是在板的各项能量上附加一些简单的修正项,可以很方便地和板的能量一并计算. 矩阵  $K_{AC}$  的计算也甚为简单.

如果平行于  $x$  方向的梁不止一条,则再迭加一些相应的修正项即成. 所以,只要给出梁的位置及其力学特性参数,整个分析可以自动完成.

对于平行于  $y$  方向的梁,也可用完全类似的方法进行分析. 所以,只要整个梁系平行于矩形边界(正交梁系),上述方法都可以适用. 为了计算简单,最好适当划分网格,使所有的梁都分布在网格线上.

以上讨论中,我们假设了平行于  $x$  方向的梁其  $y$  向弯曲可以忽略. 如果要把这项也考虑在内,则只要在梁的弯曲应变能中增加相应的项,原则上没有任何困难.

最后,我们将样条有限元和通常有限元分析板梁组合结构的步骤作一比较.

通常有限元分析组合结构,一般是先分别形成板元和梁元的单元刚度矩阵,再将每个梁元的刚度矩阵经过偏心处理(也就是将梁的结点位移转换为板的结点位移),迭加到板元的刚度矩阵上,最后形成总刚度矩阵。

样条有限元分析则是先把每条梁的应变能,原来由梁的位移表示转换为由板的位移表示,然后将板和梁的应变能离散化,再将梁的系数矩阵迭加到板的系数矩阵上。

从位移的转移方式,我们可以看到,在有限元法中,梁和板只是在一些结点上互相刚接。在其他接触点上,板的位移模式和梁的位移模式一般是不协调的,实际上也很难做到协调,这与真实的接触情况有很大差别,虽然这样做最终并不影响方法的收敛性。样条有限元则是把整条梁的应变能由梁的位移表示转换为由板的位移表示,而且板和梁在接触线上的位移模式是一样的,所以板和梁在整条线上是处处刚接的,这样处理更符合实际情况。

本文 § 5 关于板梁组合结构部分是在冯康教授的建议和影响下完成的,谨致谢意。

### 参 考 文 献

- [1] 冯 康, 基于变分原理的差分格式, 应用数学与计算数学, 2:4 (1965), 238—262.
- [2] O. C. Zienkiewicz, The Finite Element Method in Engineering Science, 1971.
- [3] G. Strang, G. J. Fix. An Analysis of the Finite Element Method, 1973

## ON SPLINE FINITE ELEMENT METHOD

Shih Chung-tze

(China University of Science and Technology)

### ABSTRACT

In this paper a finite element method based on cubic  $B$ -spline is presented to obtain approximate solution for the equilibrium problems of elastic composite structures on regular regions. A computational scheme well suited for various types of boundary conditions is derived. It is easily carried out by a computer. In comparison with the usual nodal finite element method, the main features of the present method are higher accuracy and more economy in computing storage and time requirements. The effect of imposing natural boundary condition as constraints is considered and it is shown by a plate bending problem that this effect is quite superficial. Several numerical results are presented.