组合流形上的椭圆方程与组合弹性结构* 1)

冯　康

(中国科学院计算中心)

在偏微分方程的通常理论中，人们讨论空间 R^n 中的均匀维数的区域 Ω，在其上规定了微分方程，在 $n-1$ 维的边界 $\partial\Omega$ 上则规定边界条件，这种边界条件通常在性质上要比微分方程本身简单些. 很自然地期望把这样的问题框架推广到不均匀维数的区域，它是由不同维数的片块适当地连结而成，在每一片块上规定了微分方程，它们是通过交接关系相互耦合着的，最终还可以在剩下的边界上规定边界条件. 许多工程问题中的数学性状确是这样，例如，复杂结构中的传热，特别是组合弹性结构等. 这里整个结构是由三维的立体、二维的板或壳和一维的杆或拱等组成，相互耦合而成为整体. 它们可以具有近代技术所特有的那种几何上与解析上的高度复杂性，要求用一种合适的数学方式来处理. 本文是作者在这一方向上所得初步结果的综合介绍，详见即将发表的 [1—4].

1. 几 何 基 础[1]

以下将讨论 R^n 中的几何形体，它是由不同维数的所谓单元以适当的方式组合而成. 0 维单元就是顶点. 一维单元是一段光滑弧段，其边缘由两个 0 维单元组成. 二维单元是一块光滑的可定向曲面，其边缘是片段光滑的，由有限多个一维单元组成. 一般地，一个 p 维单元 σ 是一个 p 维连通的光滑的黎曼流形 (具有由 R^n 诱导出来的度量)，其边缘由有限多个 $p-1$ 维单元组成，每一个这种 $p-1$ 维单元叫做 p 维单元 σ 的一个真边. 每个 $p-1$ 维真边，作为 $p-1$ 维单元，又有有限多个 $p-2$ 维单元作为它自己的真边，依此类推，一直降到若干个 0 维单元，它们都位于 σ 的几何边缘上. 所有这些单元(除了 σ 的 $p-1$ 维真边以外)连同 p 维单元 σ 本身统称为 σ 的非真边. σ 的真边与非真边统称为 σ 的边. 我们将认为单元作为点集是开的，其边界排除在外. R^n 中的一个单元族 M 叫做一个组合流形，如果满足下列条件:

1) 如果某单元属于族 M，则它所有的边亦属于 M.

2) 族 M 中任意两个单元的闭包的交集或者为空，或者是 M 中有限多个同一维数的单元的闭包的并集.

3) 族 M 所有单元的点集的并集是连通的.

在组合流形中，可以定义边缘算符 ∂ 及协边缘算符 δ 如常: 对于 $\sigma_1, \sigma_2 \in M$，我们将写作 $\sigma_1 \in \partial\sigma_2$ 或 $\sigma_2 \in \delta\sigma_1$，如果 σ_1 是 σ_2 的一个真边.

---

* 1979 年 4 月 18 日收到.

1) 本文是作者应法国国家科研中心 (Centre Nationale de la Recherche Scientifique) 及意大利国家科学院 (Accademia Nazionale dei Lincei) 邀请于1978年10月和11月在法国和意大利讲学稿的一部分.

考虑组合流形 M(作为单元族)的一个特定的单元子族 Ω，它称为从属于 M 的一个组合结构，如果下列条件被满足:

1) Ω 的组合闭包 $\bar{\Omega}$ 与族 M 重合.

2) Ω 内的单元的维数至少是 1.

3) Ω 是强连通的，这就是说，如果有 $\sigma', \sigma'' \in \Omega$，以及 $\sigma \in \bar{\Omega}$，$\sigma \in \bar{\sigma}' \cap \bar{\sigma}''$，于是恒存在两个序列

$$\sigma'_0 = \sigma, \sigma'_1, \cdots, \sigma'_{m'} = \sigma';$$
$$\sigma''_0 = \sigma, \sigma''_1, \cdots, \sigma''_{m''} = \sigma'',$$

使得

$$\sigma'_i, \sigma''_i \in \Omega, \quad \sigma'_{i-1} \in \partial\sigma'_i, \quad \sigma''_{i-1} \in \partial\sigma''_i, \quad i \geqslant 1.$$

可以有不同的组合结构从属于同一个组合流形. 以下将恒设 Ω 为一个从属于组合流形 M 的组合结构，为方便计，将以 $\bar{\Omega}$ 表示 M. 组合结构 Ω 中的单元将称为结构单元，以示区别于组合流形中的其他单元，后者即 $\bar{\Omega}\backslash\Omega$ 中的单元，将称为非结构单元.

以 $\bar{\Omega}^p$ 表示组合流形 $\bar{\Omega}$ 中所有的 p 维单元的总合，称为 $\bar{\Omega}$ 的 p 维骨架，$\Omega^p = \bar{\Omega}^p \cap \Omega$ 即为组合结构 Ω 的 p 维骨架. 设 $\sigma \in \bar{\Omega}^p\backslash\Omega^p$ 并且存在 $\sigma' \in \Omega^{p+1}$，使得 $\sigma \in \partial\sigma'$，则称这样的 p 维非结构单元为组合结构的 p 维边界单元，它们的全体组成组合结构 Ω 的 p 维边界 Γ^p. $\Gamma = \Gamma^0 \cup \cdots \cup \Gamma^{n-1}$ 称为组合结构 Ω 的边界，也记作 $\partial\Omega$. 注意，在这里组合结构的边界有其特有的含义.

以下所谓组合流形上的微分方程问题是指在其所从属的某组合结构 Ω 上规定微分方程，在边界 $\partial\Omega$ 上规定边界条件.

2. 组合流形上的 Poisson 方程[1]

为简明计，我们将讨论 R^n 中的多面体式的组合流形 $\bar{\Omega}$ 及组合结构 Ω，这就是说，每个 p 维单元是在 R^n 中的某个 p 维超平面上. 在每个 p 维单元 σ 上引进局部坐标 $x_1^\sigma, \cdots, x_p^\sigma$，取 Sobolev 空间 $H^1(\sigma)$ 以及它们的积空间

$$H^1(\Omega) = \prod_{\sigma \in \Omega} H^1(\sigma),$$

它的一般元 $u = (u_\sigma)_{\sigma \in \Omega}$，$u_\sigma \in H^1(\sigma)$ 具有范数

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 = \sum_{\sigma \in \Omega} \|u\|_{1,\sigma}^2.$$

设 $\tau \in \bar{\Omega}^{p-1}$，$\tau \in \partial\sigma$，根据痕迹定理，$u^\sigma$ 在 τ 有边界值，记为 $u^{\sigma,\tau} \in H^{\frac{1}{2}}(\tau)$. 命 $H^{*1}(\Omega)$ 为 $H^1(\Omega)$ 的子空间，其元满足下列连结条件:

1) 如果 $\sigma, \tau \in \Omega$，$\tau \in \partial\sigma$，则 $u^{\sigma,\tau} = u^\tau$.

2) 如果 $\sigma, \sigma' \in \Omega$，$\tau \in \bar{\Omega}$，$\tau \in \partial\sigma \cap \partial\sigma'$，则 $u^{\sigma,\tau} = u^{\sigma',\tau}$，因此，$u^\tau$ 也有确切的意义.

以下将在各结构单元 σ 上定义 Poisson 方程，而上述连结条件将使它们之间相耦合而不是互相分离的.

可以证明 $H^{*1}(\Omega)$ 为 $H^1(\Omega)$ 的一个闭子空间而且下列定理成立:

1）把空间 $H^{*1}(\Omega)$ 映入自身（但具有较弱的范数

$$\|u\|_{0,\Omega}^2 = \sum_{\sigma\in\Omega} \|u\|_{0,\sigma}^2)$$

的正则嵌入的紧凑性定理.

2）等价范数定理：设 L 是 $H^{*1}(\Omega)$ 上的线性连续泛函而且 $L(1)\neq 0$，则有

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 \asymp |u|_{1,\Omega}^2 + L^2(u),$$

Ω 的边界 $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$，在 Γ_0 将给定 Dirichlet 边界条件，在 Γ_1 上给定 Neumann 边界条件.

为简单计，考虑齐次的 Dirichlet 条件，命

$$K_0 = \{u\in H^{*1} | u^\sigma = 0,\quad \forall\sigma\in\Gamma_0\},$$

K_0 是 $H^{*1}(\Omega)$ 的一个闭子空间. 考虑变分问题：

$$\text{求 } u\in K_0 \text{ 使得 } A(u,v) = F(u),\quad \forall v\in K_0, \tag{1}$$

此处的双线性泛函 $A(u,v)$ 及线性泛函 $F(v)$ 定义为

$$A(u,v) = \sum_{\sigma\in\Omega} A^\sigma(u^\sigma, v^\sigma), \tag{2}$$

$$A^\sigma(u^\sigma, v^\sigma) = \sum_{\sigma\in\Omega}\int_\sigma \left(a^\sigma \sum_i \frac{\partial u^\sigma}{\partial x_i^\sigma}\frac{\partial v^\sigma}{\partial x_i^\sigma} + c^\sigma u^\sigma v^\sigma\right) d\sigma + \sum_{\sigma\in\Gamma_1}\int_\sigma c^\sigma u^\sigma v^\sigma d\sigma,$$

$$a^\sigma \geqslant a_0 > 0,\quad c^\sigma \geqslant 0,$$

$$F(v) = \sum_{\sigma\in\Omega\cup\Gamma_1} F^\sigma(v^\sigma), \tag{3}$$

$$F^\sigma(v^\sigma) = \int_\sigma f^\sigma v^\sigma d\sigma,\quad \sigma\in\Omega\cup\Gamma_1.$$

这一变分问题等价于耦合的 Poisson 方程组的混合边值问题：

$$\begin{cases} -\operatorname{div}^\sigma a^\sigma \operatorname{grad}^\sigma u^\sigma + c^\sigma u^\sigma + \sum\limits_{\rho\in\delta\sigma} a^\rho n^{\rho,\sigma},\quad \operatorname{grad}^\rho u^\rho = f^\sigma,\quad \forall\sigma\in\Omega, & (4)\\ \sum\limits_{\rho\in\delta\sigma} a^\rho n^{\rho,\sigma}\cdot \operatorname{grad}^\rho u^\rho + c^\sigma u^\sigma = f^\sigma,\quad \forall\sigma\in\Gamma_1, & (5)\\ u^\sigma = 0,\quad \forall\sigma\in\Gamma_0, & (6)\end{cases}$$

这里 $n^{\rho,\sigma}$ 为单元 ρ 在其边 $\sigma\in\partial\rho$ 上的单位外法向量. 这里方程（4）就是耦合的 Poisson 方程，它与通常的 Poisson 方程的差别就在于带有高维的协边界 $\delta\sigma$ 所贡献的耦合项. 方程（5）就是通常的自然边界条件. 方程（6）就是通常的强加边界条件，它们都提在组合结构 Ω 自身的边界 $\partial\Omega$ 上.

上述变分问题在种种系数的情况下的椭圆正定性可以由前列的等价范数定理得到保证.

对于非齐次的 Dirichlet 边界条件，给定的各单元上边界数据之间还需满足补充的相容性条件以保证解的存在性.

人们熟知，对于 R^n 中单一的 n 维域 Ω 的 Poisson 方程的 Dirichlet 边界条件必须提在 $n-1$ 维边界的具有正的 $n-1$ 维测度的集合上才能保证问题提法的适定性，而不能提

在低于 $n-1$ 维的边界集合上. 应该指出的是,对 R^n 中的 n 维组合结构 Ω 而言, Dirichlet 边界条件可以给在低于 $n-1$ 维的边界集合上,也就是说,既可以提在 Γ^{n-1} 上,也可以提在 Γ^{n-2} 上, $\cdots$, 直至 0 维的 Γ^0 上而仍然是适定的. 强加边界条件可以向低维数部段下放的这一特点是由组合结构的强连通性和连结条件所保证的.

组合流形上的 Poisson 方程, 可以用于组合结构上的传热问题、扩散问题以及电磁场问题,等等. 这套数学理论框架自然可以推广到随时间推移的演化方程,从而得到组合结构上的波动方程(双曲型)、热传导方程(抛物型)等以应用到种种复杂结构上的动态瞬变问题.

3. 组合弹性结构[2,3]

组合弹性结构是 R^3 中的组合流形上的耦合微分方程的另一个典例. 事实上,我们将以后者的严格理论作为前者的合适的数学基础.

考虑 R^3 中的组合流形 $\bar{\Omega}$ 及其从属的组合结构 Ω. 这里的结构单元将称为构件. 三维构件就是弹性体,以 ρ 表示. 二维构件就是抗拉及抗弯的薄板或薄壳,以 σ 表示. 一维构件就是轴向抗拉及抗扭和横向抗弯的细杆或拱,以 τ 表示. 非构件的二维、一维单元也分别以 σ, τ 表示, 0 维单元以 π 表示.

为简单计, 本文只讨论多面体组合弹性结构, 二维构件只包括平直板件,一维构件只包括直杆, 壳与拱暂时排除在外. 对于包括弯曲构件的组合流形的数学理论架子基本上是相同的,只是增加一些几何上、解析上的复杂性.

在 R^3 中取定整体坐标 x_i, 对每个单元取定局部坐标 x_i^ρ, x_i^σ, x_i^τ, x_i^π, $i=1, 2, 3$, 都取右手系. 在二维板件上 $x_3^\sigma=0$, x_1^σ, x_2^σ 为拉伸方向, x_3^σ 为弯曲方向. 在一维杆件 τ 上 $x_2^\tau=x_3^\tau=0$, x_1^τ 为拉伸及扭转方向, x_2^τ, x_3^τ 为弯曲方向.

在 Ω 上有两个矢量场分布即位移 u_i 及转角 $\omega_i=u_{3+i}$, $i=1, 2, 3$. 它们在各单元的局限值用整体坐标表示记为 $u_\rho=u_{\rho, i}$, $u_\sigma=u_{\sigma, i}$, $\cdots$ 以及 $\omega_\rho=\omega_{\rho, i}$, $\omega_\sigma=\omega_{\sigma, i}$, $\cdots$; 用局部坐标表示则记为 $u^\rho=u_i^\rho$, $u^\sigma=u_i^\sigma$, $\cdots$, 以及 $\omega^\rho=\omega_i^\rho$, $\omega^\sigma=\omega_i^\sigma$, $\cdots$. 每个单元有其正交矩阵 A^ρ, A^σ, A^τ, A^π, 表示从局部到整体的坐标变换, 例如 $u_\sigma=A^\sigma u^\sigma$, $u_\tau=A^\tau u^\tau$, $\omega_\sigma=A^\sigma\omega^\sigma$, $\omega_\tau=A^\tau\omega^\tau$ 等等. 为简单计, 不妨取定 $A^\rho=A^\pi=I$, $A^\sigma=[a_{ij}^\sigma]$, $A^\tau=[a_{ij}^\tau]$.

以下将对每类构件给出其基本的自由度及由它派生的量以及能量的表达式. 一概用各自的局部坐标表示. 但有关的上标 ρ, σ, τ, π 等, 除了个别地方为了突出醒目加以标出以外,均将省略.

1. 体件 ρ

基本自由度: $u_i^\rho=u_i^\rho(x_1^\rho, x_2^\rho, x_3^\rho)\in H^1(\rho)$, $i=1, 2, 3$.

转角: $\omega_1=\omega_{23}$, $\omega_2=\omega_{31}$, $\omega_3=\omega_{12}$, $\omega_{ij}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}-\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$.

应变: $\varepsilon_{ij}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}+\dfrac{\partial u_i}{\partial u_j}\right)$.

应力：$S_{ij}=\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij}+\frac{E_\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\sum_1^3\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$.

函数空间：$H^{111}(\rho)=H^1(\rho)\times H^1(\rho)\times H^1(\rho)$.

范数：$\|u^\rho\|^2_{111,\rho}=\sum_{i=1}^3\|u_i^\rho\|^2_{1,\rho}$.

双线性能量泛函：$D^\rho(u^\rho,v^\rho)=\int_\rho\sum_{i,j=1}^3 S_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)d\rho$.

无应变状态：$D^\rho(v^\rho,v^\rho)=0\Longleftrightarrow v^\rho\doteq a^\rho+b^\rho\wedge x^\rho$.

载荷：$f_i^\rho=f_i^\sigma(x_1^\rho,x_2^\rho,x_3^\sigma)$, $i=1,2,3$.

线性载荷泛函：$F^\rho(v^\rho)=\int_\rho\sum_{i=1}^3 f_i^\rho v_i^\rho d\rho$.

2. 板件 σ

基本自由度：$u_i^\sigma=u_i^\sigma(x_1^\sigma,x_2^\sigma)\in H^1(\sigma)$, $i=1,2$,

$u_3^\sigma=u_3^\sigma(x_1^\sigma,x_2^\sigma)\in H^2(\sigma)$.

转角：$\omega_1^\sigma=u_4^\sigma=\frac{\partial u_3}{\partial x_2}$, $\omega_2^\sigma=u_5^\sigma=\frac{\partial u_3}{\partial x_1}$, $\omega_3^\sigma=u_6^\sigma=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$.

应变：$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$, $i,j=1,2$.

$$K_{ij}=-\frac{\partial^2u_3}{\partial x_i\partial x_j},\ i,j=1,2.$$

应力：平面应力 $Q_{ij}=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left[(1-\nu)\varepsilon_{ij}+\nu\sum_1^2\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right]$, $i,j=1,2$.

弯　矩 $M_{ij}=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[(1-\nu)K_{ij}+\nu\sum_1^2K_{kk}\delta_{ij}\right]$, $i,j=1,2$.

剪 应 力 $Q_{3j}=\sum_{i=1}^2\frac{\partial M_{ij}}{\partial x_i}$, $j=1,2$.

函数空间：$H^{112}(\sigma)=H^1(\sigma)\times H^1(\sigma)\times H^2(\sigma)$.

范数：$\|u^\sigma\|^2_{112,\sigma}=\sum_{i=1}^2\|u_i^\sigma\|^2_{1,\sigma}+\|u_3^\sigma\|^2_{2,\sigma}$.

双线性能量泛函：$D^\sigma(u^\sigma,v^\sigma)=\int_\sigma\sum_{i,j=1}^2(Q_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)+M_{ij}(u)K_{ij}(v))d\sigma$.

无应变状态：$D^\sigma(v^\sigma,v^\sigma)=0\Longleftrightarrow v^\sigma=(a^\sigma+b^\sigma\wedge x^\sigma)_{x_3^\sigma=0}$.

载荷：$f_i^\sigma=f_i^\sigma(x_1^\sigma,x_2^\sigma)$.

线性载荷泛函：$F^\sigma(v^\sigma)=\int_\sigma\sum_{i=1}^3 f_i^\sigma v_i^\sigma d\sigma$.

对于 $\sigma\in\Gamma^2$ 载荷项也有意义.

3. 杆件 τ

基本自由度：$u_1^\tau = u_1^\tau(x_1^\tau) \in H^1(\tau)$,

$$u_i^\tau = u_i^\tau(x_1^\tau) \in H^2(\tau),\ i = 2, 3,$$

$$\omega_1^\tau = u_4^\tau(x_1^\tau) \in H^1(\tau).$$

转角：$\omega_1^\tau = u_4^\tau$, $\omega_2^\tau = u_5^\tau = -\dfrac{du_3}{dx_1}$, $\omega_3^\tau = u_6^\tau = \dfrac{du_2}{dx_1}$.

应变：拉 $\varepsilon_{11} = \dfrac{du_1}{dx_1}$,

弯 $K_2 = -\dfrac{d^2u_3}{dx_1^2}$, $K_3 = \dfrac{d^2u_2}{dx_1^2}$,

扭 $K_1 = \dfrac{d\omega_1}{dx_1} = \dfrac{du_4}{dx_1}$.

应力：拉 $Q_1 = EA\varepsilon_{11}$,

弯矩 $M_2 = EI_{22}K_2 + EI_{23}K_3$,　$M_3 = EI_{32}K_2 + EI_{33}K_3$,

扭矩 $M_1 = \dfrac{EP}{2(1+\nu)}K_1$，$P$ 为几何抗扭刚度.

剪力 $Q_2 = -\dfrac{dM_3}{dx_1}$, $Q_3 = \dfrac{dM_2}{dx_1}$.

函数空间：$H^{1221}(\tau) = H^1(\tau) \times H^2(\tau) \times H^2(\tau) \times H^1(\tau)$.

范数：$\|u^\tau\|^2_{1221,\tau} = \sum\limits_{i=1,4} \|u_i^\tau\|^2_{1,\tau} + \sum\limits_{i=2,3} \|u_i^\tau\|^2_{2,\tau}$.

双线性能量泛函：$D^\tau(u^\tau, v^\tau) = \int\left[Q_1(u)\varepsilon_{11}(v) + \sum\limits_{i=1}^{3} M_i(u)K_i(v)\right]d\tau$.

无应变状态：$D^\tau(v^\tau, v^\tau) = 0 \Longleftrightarrow v^\tau = (a^\tau + b^\tau \wedge x^\tau)_{x_2^\tau = x_3^\tau = 0}$.

载荷：$f_i^\tau = f_i^\tau(x_1^\tau)$, $i = 1, 2, 3$, $m_1^\tau = f_4^\tau = f_4^\tau(x_1^\tau)$.

线性载荷泛函：$F^\tau(v^\tau) = \int_\tau \sum\limits_{i=1}^{4} f_i v_i d\tau$.

对于 $\tau \in \Gamma^1$ 载荷项也有意义.

4. 点元 $\pi \in \Gamma^0$

载荷：f_i^π, $i = 1, 2, 3$, $m_i^\pi = f_{i+3}^\pi$, $i = 1, 2, 3$.

线性载荷泛函：$F^\pi(v^\pi) = \sum\limits_{i=1}^{6} f_i^\pi v_i^\pi$.

我们进而讨论组合结构内各个构件之间的连接问题，将只讨论一种基本的也是最主要的连接方式，即刚性连接，简称刚接．工程实践中可以出现其它种种方式的连接方式，但都可以从刚接适当放松约束而得到.

以下将考虑到单元的定向，每个局部右手系坐标就规定了单元的定向．对于定向单元 $\alpha \in \bar{\Omega}^p$, $\beta \in \bar{\Omega}^{p+1}$, 可以规定其交接数 $e(\alpha, \beta)$;

$$\begin{cases} e(\alpha, \beta) = 0, & \text{如果 } \alpha \notin \partial\beta, \\ e(\alpha, \beta) = 1, & \text{如果 } \alpha \in \partial\beta \text{ 而且 } \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 顺向}, \\ e(\alpha, \beta) = -1, & \text{如果 } \alpha \in \partial\beta \text{ 而且 } \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 逆向}. \end{cases}$$

刚性连接含有下列三项约束条件：

1）整体坐标下位移的连续性：

如果 $\alpha, \beta \in \Omega$，$\alpha \in \partial\beta$，则有 $u_\alpha = u_{\beta,\alpha}$.

如果 $\alpha \in \bar{\Omega}$，β，$\gamma \in \Omega$，$\alpha \in \partial\beta \cap \partial\gamma$，则有 $u_{\beta,\alpha} = u_{\gamma,\alpha}$，因此 u_α 恒有意义.

2）杆与板或板与板之间的切向转角的连续性：

如果 $\tau \in \Omega^1$，$\sigma \in \Omega^2$，$\tau \in \partial\sigma$，则有

$$\omega_1^\tau = -e(\tau, \sigma)\frac{\partial u_3^\sigma}{\partial n^{\sigma,\tau}}.$$

如果 $\tau \in \bar{\Omega}^1$，$\sigma, \sigma' \in \Omega^2$，$\tau \in \partial\sigma \cap \partial\sigma'$，则有

$$e(\tau, \sigma)\frac{\partial u_3^\sigma}{\partial n^{\sigma,\tau}} = e(\tau, \sigma')\frac{\partial u_3^{\sigma'}}{\partial n^{\sigma',\tau}}.$$

3）杆与杆之间整体坐标下的位移与转角的连续性：

如果 τ，$\tau' \in \Omega^1$，$\pi \in \partial\tau \cap \partial\tau'$，则有 $\omega_{\tau,\pi} = \omega_{\tau',\pi}$，$u_{\tau,\pi} = u_{\tau',\pi}$，因此 u_τ，ω_τ 恒有意义.

现在来考察组合弹性结构的整体．取积空间

$$H(\Omega) = \prod_{\rho\in\Omega^3} H^{111}(\rho) \times \prod_{\sigma\in\Omega^2} H^{112}(\sigma) \times \prod_{\tau\in\Omega'} H^{1221}(\tau).$$

其一般元为 $u = (u^\rho, u^\sigma, u^\tau)$，$\rho \in \Omega^3$，$\sigma \in \Omega^2$，$\tau \in \Omega^1$，范数为

$$\|u\|_\Omega^2 = \sum_\rho \|u^\rho\|_{111,\rho}^2 + \sum_\sigma \|u^\sigma\|_{112,\sigma}^2 + \sum_\tau \|u^\tau\|_{1221,\tau}^2.$$

命 $H^*(\Omega)$ 为由 $H(\Omega)$ 内一切满足上述刚接条件 1，2，3 的元组成的子空间．可以证明 $H^*(\Omega)$ 为 $H(\Omega)$ 内的闭子空间.

在 $H^*(\Omega)$ 上取双线性泛函：

$$D(u, v) = \sum_{\rho\in\Omega^3} D^\rho(u^\rho, v^\rho) + \sum_{\sigma\in\Omega^2} D^\sigma(u^\sigma, v^\sigma) + \sum_{\tau\in\Omega^1} D^\tau(u^\tau, v^\tau). \tag{7}$$

在强连通性以及刚接条件的基础上可以证明 $D(v, v) = 0 \Longleftrightarrow v = a + b \wedge x$，即 u 为无穷小刚性运动．于是

$$P(\Omega) = \{v \in H^*(\Omega) | D(v, v) = 0\} = \{v = a + b \wedge x\},$$

其维数为 6.

可以证明下列二定理：

1）将 $H^*(\Omega)$ 映入自身但具有较弱范数

$$\|u\|_\Omega'^2 = \sum_\rho \|u^\rho\|_{000,\rho}^2 + \sum_\sigma \|u^\sigma\|_{001,\sigma}^2 + \sum_\tau \|u^\tau\|_{0110,\tau}^2$$

的正则嵌入的紧致性定理.

2）等价范数定理：设 L_i，$i = 1, \cdots, b$ 为 $H^*(\Omega)$ 上的线性连续泛函，使得对于 $v \in P(\Omega)$，$L_i(v) = 0$，$i = 1, \cdots, 6$ 当且仅当 $v = 0$．于是

$$\|u\|_\Omega^2 \asymp D(u, u) + \sum_{i=1}^b L_i^2(u).$$

这一定理提供了严格的基础来验证组合弹性结构的种种边界值问题的椭圆正定性.

举 Neumann 问题为例.

$$\text{求 } u \in H^*(\Omega) \text{ 使得 } D(u, v) = F(v), \ \forall v \in H^*(\Omega), \tag{8}$$

此处

$$F(v) = \sum_{\rho \in \Omega^3} F^\rho(v^\rho) + \sum_{\sigma \in \Omega^2 \cup \Gamma^2} F^\sigma(v^\sigma) + \sum_{\tau \in \Omega^1 \cup \Gamma^1} F^\tau(v^\tau) + \sum_{\pi \in \Gamma^0} F^\pi(v^\pi). \tag{9}$$

这一变分问题具有除了相差一个无穷小刚性运动外唯一解的充要条件是载荷的合力及合矩为零,即

$$\sum_{\rho \in \Omega^3} \int_\rho f_\rho d\rho + \sum_{\sigma \in \Omega^2 \cup \Gamma^2} \int_\sigma f_\sigma d\sigma + \sum_{\tau \in \Omega^1 \cup \Gamma^1} \int_\tau f_\tau d\tau + \sum_{\pi \in \Gamma^0} f_\pi = 0,$$

$$\sum_{\rho \in \Omega^3} \int_\rho x \wedge f_\rho d\rho + \sum_{\sigma \in \Omega^2 \cup \Gamma^2} \int_\sigma x \wedge f_\sigma d\sigma + \sum_{\tau \in \Omega^1 \cup \Gamma^1} \int_\tau (x \wedge f_\tau + m_\tau) d\tau$$

$$+ \sum_{\pi \in \Gamma^0} (x \wedge f_\pi + m_\pi) = 0,$$

这里 $m_\tau = A^\tau m^\tau$, $m^\tau = (m_1^\tau, 0, 0)^T$.

对应于变分问题(8, 7, 9)的组合结构的平衡方程——包括耦合的微分方程和自然边界条件——就是

$$\rho \in \Omega^3: \ \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial S_{ij}^\rho}{\partial x_j^\rho} + f_i^\rho = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{10}$$

$$\sigma \in \Omega^2 \cup \Gamma^2: \ \left\{ \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial Q_{ij}^\sigma}{\partial x_j^\sigma} \right\} - \sum_{\rho \in \delta\sigma} \sum_{j=1}^{3} S_{ij}^\rho a_{ji}^\sigma + f_i^\sigma = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{11}$$

$$\tau \in \Omega^1 \cup \Gamma^1: \ \left\{ \frac{dQ_i^\tau}{dx_1^\tau} \right\} - \sum_{\sigma \in \delta\tau} \sum_{j=1}^{3} \left(Q_{jn}^\sigma \sum_{k=1}^{3} a_{kj}^\sigma a_{ki}^\tau + \frac{\partial M_{tn}^\sigma}{\partial t^{\sigma, \tau}} a_{j3}^\sigma a_{ji}^\tau \right) + f_i^\tau = 0,$$
$$i = 1, 2, 3. \tag{12}$$

$$\left\{ \frac{dM_1^\tau}{dx_1^\tau} \right\} - \sum_{\sigma \in \delta\tau} e(\tau, \sigma) M_{nn}^\sigma + m_1^\tau = 0 \tag{13}$$

$$\pi \in \Gamma^0: \ - \sum_{\tau \in \delta\pi} e(\pi, \tau) \sum_{j=1}^{3} Q_j^\tau a_{ij}^\tau - \sum_{\tau \in \delta\pi} \sum_{\sigma \in \delta\tau} e(\pi, \tau) e(\tau, \sigma) M_{tn}^\sigma a_{i3}^\sigma + f_i^\pi = 0,$$
$$i = 1, 2, 3. \tag{14}$$

$$- \sum_{\tau \in \delta\pi} e(\pi, \tau) \sum_{j=1}^{3} M_j^\tau a_{ij}^\tau + m_i^\pi = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{15}$$

当 $\sigma \in \Gamma^2$, $\tau \in \Gamma^1$ 时,花括弧 $\{\cdots\}$ 中的项要略去. M_{nn}, M_{tn} 为板件边界上的弯矩和扭矩, n 为外法向, t 为切向, n, t 及 x_3^σ 组成右手系.

在以上数学理论的基础上,作者证明了将有限元方法用于组合弹性结构的普遍性收敛定理[4]. 正是出于后一动机,才引起作者研究组合弹性结构的数学基础乃至于更一般的组合流形上的椭圆方程的理论. 看来组合流形的微分方程会有很广泛的应用.

最后指出一些有关本文主题的值得探讨的问题:

1）组合流形上的椭圆方程的解的正则性问题．G. Fichera 向作者指出，鉴于不同构件交接处在某种条件下可能引起某种奇异性，值得探讨把解空间从标准的 Sobolev 空间加以扩大．

2）组合流形上 Sobolev 空间理论的发展．

3）简单的典型性的组合流形上耦合 Laplace 方程的格林函数的解析构成．

4）与组合流形上的椭圆方程相联系的积分方程．

5）组合流形上的演化型方程理论．

6）de Rham-Hodge 调和积分理论对于组合流形的推广．

参　考　文　献

[1] 冯康，组合流形上的椭圆方程(待发表)．
[2] 冯康，组合弹性结构的数学基础(待发表)．
[3] 冯康，石钟慈，弹性结构的数学理论，将由科学出版社出版．
[4] 冯康，关于有限元法用于组合弹性结构的收敛性(待发表)．