关于插值的稳定性*

黄 鸿 慈
（中国科学院计算中心）

ON THE STABILITY OF INTERPOLATION

Huang Hong-ci
(*Computing Center, Academia Sinica*)

Abstract

This paper gives some definitions on stability of interpolating process, and then offers the sufficient and necessary conditions for stability. On this basis, stability or instability involving several types of interpolation is discussed. Some ideas on the relationship between stability and convergence of interpolating process are also presented.

实际计算表明，高阶多项式插值是不稳定的，分片低阶多项式插值则有良好的稳定性．在[1]中对此有简要的说明，本文将对此进行较详尽的理论分析。

§1. 插值的稳定性概念

所谓插值，就是在区间 $[a, b]$ 上给定如下的无穷节点三角阵：

$$\begin{array}{l} x_0^0 \\ x_0^1 \ \ x_1^1 \\ x_0^2 \ \ x_1^2 \ \ x_2^2 \\ \quad\cdots \\ x_0^n \ \ x_1^n \ \cdots\cdots \ x_n^n \\ \quad\cdots \end{array} \tag{1.1}$$

其中 $a \leqslant x_i^n \leqslant b$，且 $x_i^n \neq x_j^n$．对于每一排节点 $x_i^n (0 \leqslant i \leqslant n)$，存在对应的函数族 S_n（通常 S_n 是有限维线性空间）．对给定的函数 $f(x)$（有某种光滑度）在 x_i^n 上的数据（函数值 $f(x_i^n)$ 或包括导数值 $f^{(m_i)}(x_i^n)$），存在唯一的 $\varphi \in S_n$，使成立

$$f(x_i^n) = \varphi(x_i^n) \tag{1.2}$$

或包括

$$f^{(m_i)}(x_i^n) = \varphi^{(m_i)}(x_i^n) \qquad m_i \geqslant 1 \tag{1.2a}$$

---

* 1980 年 7 月 22 日收到.

则称 φ 为 f 的插值函数，记为

$$\varphi(x)=I_n[f;\ x]. \tag{1.3}$$

插值函数族 S_n 具有性质：若 $\varphi\in S_n$，则

$$\varphi(x)=I_n[\varphi;\ x]. \tag{1.4}$$

以下总假定常数 $1\in S_n$.

当给定数据只有 $f(x_i^n)$ 并取 S_n 为全体阶不大于 n 的多项式，即为拉格朗日插值．当数据包括 $f(x_i^n)$ 及 $f'(x_i^n)$ 并取 S_n 为全体阶不大于 $(2n+1)$ 的多项式，即为 Hermite 型插值．当给定数据为函数值或包括导数值，而 S_n 取为分片多项式时，就是分片多项式插值.

现在先就数据只包含 $f(x_i^n)$ 的情形进行讨论．由于插值算子是线性的，故可对稳定性如下定义：

定义 1. $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，只要

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n}|f(x_i^n)|\leqslant\delta\qquad\forall n, \tag{1.5}$$

就成立

$$\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|I_n[f;x]|\leqslant\varepsilon, \tag{1.6}$$

则称相应于节点三角阵(1.1)及族列 $\{S_n\}$ 的插值过程是稳定的.

设 $l_i^n(x)$ $(0\leqslant i\leqslant n)$ 满足

$$\begin{cases}l_i^n(x)\in S_n,\\ l_i^n(x_j^n)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j,\\ 0 & i\neq j,\end{cases}\end{cases} \tag{1.7}$$

则称 $\{l_i^n(x)\}$ 为插值基函数．插值基函数可能有很简单的表达式（例如拉格朗日插值），也可能很复杂（例如数据出现高阶导数的 Hermite 型插值）或写不出明显表达式（例如样条插值）．由定义(1.7)以及 S_n 是线性空间，插值函数可表为

$$I_n[f;\ x]=\sum_{i=0}^{n}f(x_i^n)l_i^n(x) \tag{1.8}$$

由于常数 $1\in S_n$ 以及(1.4)，故总成立

$$\sum_{i=0}^{n}l_i^n(x)\equiv 1. \tag{1.9}$$

记

$$\lambda_n=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}\sum_{i=0}^{n}|l_i^n(x)|, \tag{1.10}$$

并按一般习惯记 $\|f\|_\infty=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$.

引理 1. 插值过程稳定的充要条件是对一切 n，λ_n 有界.

证明．由(1.8)，(1.10)得

$$\|I_n[f;\ x]\|_\infty\leqslant\lambda_n\max_{0\leqslant i\leqslant n}|f(x_i^n)|.$$

充分性立得.

由定义(1.10)，对任意 n 及任意小的 $\varepsilon>0$，总存在 ξ_n，使成立

$$\sum_{i=0}^{n} |l_i^n(\xi_n)| \geqslant \lambda_n - \varepsilon. \tag{1.11}$$

令

$$f(x_i^n) = \delta \cdot \operatorname{sign} l_i^n(\xi_n), \tag{1.11a}$$

其中 δ 为一小的正数，这时 $\max\limits_i |f(x_i^n)| = \delta$. 由(1.8),(1.11),(1.11a)得

$$\|I_n[f;\ x]\|_\infty \geqslant |I_n[f;\ \xi_n]| = \Sigma\delta|l_i^n(\xi_n)| \geqslant \delta(\lambda_n - \varepsilon),$$

故由 λ_n 的无界性可推出 $\|I_n[f;\ x]\|_\infty$ 的无界性. 必要性获证.

引理 2. 设存在序列 $\varphi_n \in S_n$，满足 $\|\varphi_n - f\|_\infty \to 0$ 并且还满足

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n \|\varphi_n - f\|_\infty = 0, \tag{1.12}$$

则插值函数列 $I_n[f;\ x]$ 一致收敛于 f，即

$$\lim_{n\to\infty} \|I_n[f;\ x] - f\|_\infty = 0. \tag{1.13}$$

证明. 由于有 $I_n[\varphi_n;\ x] = \varphi_n(x)$，故

$$\begin{aligned}\|I_n[f;x] - f\|_\infty &\leqslant \|I_n[f;x] - I_n[\varphi_n;x]\|_\infty + \|\varphi_n - f\|_\infty \\ &\leqslant (\lambda_n + 1)\|\varphi_n - f\|_\infty.\end{aligned}$$

于是由(1.12)即得(1.13).

引理 2 把插值问题的收敛性与对函数一致逼近的收敛性联系在一起. 若插值过程稳定（由引理 1，即 λ_n 有界），则由函数一致逼近的收敛性可推出插值过程的收敛性. 譬如拉格朗日插值，由 Weierstrass 定理，对 $f \in c^0[a,\ b]$，存在 $\varphi_n \in S_n$，使 $\|\varphi_n - f\|_\infty \to 0$. 故若插值过程稳定，则必收敛. 但反过来不真. 当 λ_n 无界时，(1.12)仍可能成立，下一节将举出例子. 由此可见，稳定性比收敛性更根本，要求更强.

有些问题不仅要求插值函数稳定，而且要求它的导数也稳定. 分析学上的微分运算对函数值的扰动是不稳定的，譬如取函数 $f_n(x) = \delta \sin nx$，则不论 δ 多么小（这时 $\|f_n\|_\infty = \delta$），当 n 充分大时，$\|f_n'\|_\infty$ 可任意大. 因此，对于插值过程，也不应要求插值函数的导数对函数值数据的扰动稳定.

设 $f[x_i,\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_{i+k}]$ 表示 f 的 k 阶差商，即

$$f[x_i] = f(x_i),$$

$$f[x_i,\ x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i},$$

$$f[x_i, \cdots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}] - f[x_i, \cdots x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

定义 2. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta$，只要

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant n-k} |f[x_i^n,\ x_{i+1}^n,\ \cdots,\ x_{i+k}^n]| \leqslant \delta,\ \forall n \geqslant k,$$

就成立

$$\left\|\frac{d^k}{dx^k} I_n[f;\ x]\right\|_\infty \leqslant \varepsilon,$$

则称插值过程的 k 阶导数稳定.

现在讨论数据包含导数值的情形. 为简单起见，仅讨论较常遇到的只牵涉一阶导数

的情况.

由于数据 $f(x_i^n)$ 与 $f'(x_i^n)$ 不处于同等地位,合理的定义应为

定义 3. $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta$, 只要

$$\max\{|f(x_i^n)|,\ h_n|f'(x_i^n)|\}\leqslant\delta,\ \forall n,$$

其中 $h_n=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}(x_{i+1}^n-x_i^n)$, 就成立

$$\|I_n[f;\ x]\|_\infty\leqslant\varepsilon,$$

则称插值过程稳定.

定义 4. $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta$, 只要

$$\max_i\{|f[x_i^n,\ x_{i+1}^n]|,\ |f'(x_i^n)|\}\leqslant\delta,\ \forall n$$

就成立

$$\|I_n'[f;\ x]\|_\infty\leqslant\varepsilon,$$

则称插值过程一阶导数稳定.

当数据包含 $f(x_i^n)$, $f'(x_i^n)$, 插值基函数可相应定义为 $l_i^n(x)$, $\bar{l}_i^n(x)$, 它们满足

(i) $l_i^n(x)$, $\bar{l}_i^n(x)\in S_n$ $(0\leqslant i\leqslant n)$,

(ii) $l_i^n(x_j^n)=\delta_{ij}$, $\dfrac{d}{dx}l_i^n(x_j^n)=0$,

$$\bar{l}_i^n(x_j^n)=0,\quad \frac{d}{dx}\bar{l}_i^n(x_j^n)=\delta_{ij},\quad (0\leqslant i,\ j\leqslant n). \tag{1.14}$$

对于由(1.14)所定义的插值基函数,插值函数可表为

$$I_n[f;\ x]=\sum_{i=0}^n f(x_i^n)l_i^n(x)+\sum_{i=0}^n f'(x_i^n)\bar{l}_i^n(x). \tag{1.15}$$

令

$$\bar{\lambda}_n=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}\left\{\sum_{i=0}^n|l_i^n(x)|+\frac{1}{h_n}\sum_{i=0}^n|\bar{l}_i^n(x)|\right\}, \tag{1.16}$$

仿效引理 1 的证明可得

引理 3. 数据包括 $f(x_i^n)$, $f'(x_i^n)$ 的 Hermite 型插值过程稳定的充要条件是 $\bar{\lambda}_n$ 有界.

§2. 高次插值的稳定性问题

为简化符号,往下把(1.1)中节点 x_i^n 以及插值基函数 $l_i^n(x)$ 的上标 n 略掉.

先讨论拉格朗日插值. 这时插值基函数为

$$l_i(x)=\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega_{n+1}'(x_i)}\quad(0\leqslant i\leqslant n), \tag{2.1a}$$

$$\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^n(x-x_i). \tag{2.1b}$$

根据[2],不论插值节点如何选取,有估计

$$\lambda_n=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\sum_{i=0}^n|l_i(x)|>\frac{\ln(n+1)}{8\sqrt{\pi}}, \tag{2.2}$$

故由引理 1，立得

定理 1. 不论三角阵(1.1)的节点如何选取，拉格朗日插值过程都不稳定．

事实上，通常采用的等距节点，λ_n 的增长远比下界估计(2.2)为严重．

设 $x_i = a + ih$，作变换 $x = a + th$，插值基函数可表为

$$\varphi_i(t) = l_i(a + th) = \frac{\Pi_{n+1}(t)}{(t-i)\Pi'_{n+1}(i)} \quad (0 \leqslant i \leqslant n),$$

$$\Pi_{n+1}(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - i) \qquad (0 \leqslant t \leqslant n).$$

逐个因子比较，可看出

$$\max_{0\leqslant t\leqslant n} |\varphi_i(t)| \leqslant \varphi_i(n + 1),$$

又有

$$\varphi_i(n+1) \leqslant \frac{(n+1)!}{(n-i)!\,i!} \leqslant \begin{cases} (n+1)!\Big/\left(\dfrac{n+1}{2}\right)!\,\left(\dfrac{n-1}{2}\right)! & n \text{ 为奇数}, \\ (n+1)!\Big/\left[\left(\dfrac{n}{2}\right)!\,\right]^2 & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

用 Stirling 公式进行估计，有 $\varphi_i(n+1) \leqslant O(\sqrt{n}\,2^n)$，从而得

$$\lambda_n = \max_{0\leqslant t\leqslant n} \sum_{i=0}^{n} |\varphi_i(t)| \leqslant O(n^{3/2} \cdot 2^n). \tag{2.3}$$

为了估计下界，考虑

$$\left|\varphi_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \begin{cases} \left|\Pi_{n+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|\Big/\left(\dfrac{n-1}{2}\right)\left[\left(\dfrac{n}{2}\right)!\,\right]^2 & n \text{ 为偶数}, \\ \left|\Pi_{n+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|\Big/\dfrac{n}{2}\cdot\left(\dfrac{n+1}{2}\right)!\,\left(\dfrac{n-1}{2}\right)! & n \text{ 为奇数}, \end{cases}$$

可估得

$$\lambda_n \geqslant \left|\varphi_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\left(\frac{1}{2}\right)\right| \geqslant O(n^{-2}2^n). \tag{2.4}$$

从(2.3)，(2.4)可看出，λ_n 基本上按指数增长，所以等距节点的拉格朗日插值极不稳定．

虽然定理 1 肯定了拉格朗日插值都不稳定，但以下一种情况还是可以考虑的．选取 $[a, b]$ 上 $(n+1)$ 次切贝晓夫多项式的零点作为插值节点，即

$$x_i = \frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2}\cos\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi \quad (0 \leqslant i \leqslant n). \tag{2.5}$$

根据[2]，这时有

$$\lambda_n \leqslant \frac{4}{\pi}\ln(n+1) + 8. \tag{2.6}$$

与(2.2)比较，可看出这样选取插值节点已使 λ_n 的增长速度达到最低的阶．按定义 1，这个插值过程虽不稳定，但对数增长是极缓慢的，并且，若把定义 1 中误差的度量放宽，使用如下范数：

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b \rho(x) f^2(x)\,dx}, \qquad \rho(x) = 1/\sqrt{(x-a)(b-x)},$$

则有如下稳定性结果.

定理 2. 如果按(2.5)选取插值节点，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，只要 $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}|f(x_i)|\leqslant\delta$，就成立

$$\|I_n[f;\ x]\|_2\leqslant\varepsilon. \tag{2.7}$$

证明. 当 x_i 按(2.5)选取时，(2.1b) 的 $\omega_{n+1}(x)$ 是 $[a,\ b]$ 上的切贝晓夫多项式. 由熟知的正交性质知，对一切阶数不大于 n 的多项式 $Q(x)$，$\int_a^b\rho(x)\omega_{n+1}(x)Q(x)dx=0$ 成立. 由表达式 (2.1a)，当 $i\neq j$ 时有

$$l_i(x)l_j(x)=\frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_i)}\cdot\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)(x-x_j)\omega'_{n+1}(x_j)}.$$

右端第二个因子是 $(n-1)$ 阶多项式，故有

$$\int_a^b\rho(x)l_i(x)l_j(x)dx=0\quad i\neq j. \tag{2.8}$$

由(2.8)及恒等式 $\sum\limits_{i=0}^n l_i(x)=1$，即得

$$\begin{aligned}\int_a^b\rho(x)\Big(\sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x)\Big)^2dx&\leqslant\max_{0\leqslant i\leqslant n}|f(x_i)|^2\int_a^b\rho(x)\sum_{i=0}^n l_i^2(x)dx\\&=\max_{0\leqslant i\leqslant n}|f(x_i)|^2\int_a^b\rho(x)\Big(\sum_{i=0}^n l_i(x)\Big)^2dx\\&=\max_{0\leqslant i\leqslant n}|f(x_i)|^2\int_a^b\rho(x)dx.\end{aligned}$$

因 $\int_a^b\rho(x)dx=\pi$，即成立

$$\|I_n[f;\ x]\|_2\leqslant\sqrt{\pi}\max_{0\leqslant i\leqslant n}|f(x_i)|. \tag{2.9}$$

证毕.

按(2.5)选取节点，如果 $f\in c^0[a,\ b]$，则可利用定理 2 的结果，并按引理 2 的证明方法，得到插值过程的均方收敛性，即

$$\lim_{n\to\infty}\|I_n[f;\ x]-f(x)\|_2=0.$$

要保证一致收敛性，则还要求 $f(x)$ 的光滑性比连续强一点，比如 Hölder 连续：即存在常数 $M>0$ 及 $0<\alpha\leqslant1$，使得 $f(x)$ 满足

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|^\alpha,\quad\forall x_1,x_2\in[a,\ b].$$

此时，根据 Jackson 定理[3]，存在多项式序列 $\{P_n\}$，P_n 为 n 阶多项式，满足

$$\|f-P_n\|_\infty\leqslant Cn^{-\alpha}, \tag{2.10}$$

其中常数 C 与 n 无关. 因此，由(2.6)，(2.10)得

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n\|f-P_n\|_\infty=0.$$

由引理 2 即得

$$\lim_{n\to\infty}\|I_n[f;\ x]-f(x)\|_\infty=0. \tag{2.11}$$

若给定等距节点上的数据，又要求高阶多项式逼近，如上所述，拉格朗日插值是极不稳定的．这时，如果不要求逼近多项式与被逼近函数在节点上严格重合，则用伯恩斯坦多项式是十分合适的．众所周知，在标准区间[0,1]上伯恩斯坦多项式表示为

$$\begin{cases} B_n[f;\ x] = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) P_i^n(x), \\ P_i^n(x) = C_i^n x^i (1-x)^{n-i}. \end{cases} \tag{2.12}$$

$B_n[f;\ x]$ 对连续函数 $f(x)$ 的一致逼近性也是熟知的．但从实际计算的角度看，这种逼近的最大特点在于以下定理．

定理 3. 对一切非负整数 k，存在常数 C_k，成立

$$\left\|\frac{d^k}{dx^k} B_n[f;\ x]\right\|_\infty \leqslant C_k \max_{0\leqslant i\leqslant n-k} \left| f\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}, \cdots, \frac{i+k}{n}\right]\right|, \ \forall n \geqslant k. \tag{2.13}$$

于是，根据定义 1 和定义 2，伯恩斯坦多项式逼近从它本身到各阶导数都是稳定的．

证明．由于 $P_i^n(x) \geqslant 0$，故有

$$\sum_{i=0}^{n} |P_i^n(x)| = \sum_{i=0}^{n} P_i^n(x) \equiv 1,\ \forall n. \tag{2.14}$$

于是，从(2.12)显然有

$$\|B_n[f;\ x]\|_\infty \leqslant \max_i \left| f\left(\frac{i}{n}\right)\right|. \tag{2.15}$$

通过计算可得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} B_n[f;\ x] &= \sum_{i=0}^{n-1} n \left[f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right] P_i^{n-1}(x) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] P_i^{n-1}(x). \end{aligned} \tag{2.16}$$

由(2.16)并通过归纳法可证明有

$$\frac{d^k}{dx^k} B_n[f;x] = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} k! \sum_{i=0}^{n-k} f\left[\frac{i}{n}, \cdots, \frac{i+k}{n}\right] \cdot P_i^{n-k}(x). \tag{2.17}$$

由(2.14)并取 $C_k = k!$ 即得(2.13)．

§ 3. 分段低阶插值的稳定性

本节讨论三种类型的分段低阶插值．

分段二次插值

取奇数个插值节点：$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n} = b$．对每个小段 $[x_{2i},\ x_{2i+2}]$，利用数据 $f(x_{2i})$，$f(x_{2i+1})$，$f(x_{2i+2})$ 进行二次插值，也就是说插值函数族 S_{2n} 是分段二次多项式，并且 $S_{2n} \subset c^0[a,\ b]$．插值基函数 $l_j(x)$ 视 i 为奇偶分别是

$$l_{2i}(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-x_{2i-2})(x-x_{2i-1})}{(x_{2i}-x_{2i-2})(x_{2i}-x_{2i-1})} & x_{2i-2}\leqslant x\leqslant x_{2i}\ (i=0\ \text{时略去}),\\ \dfrac{(x-x_{2i+1})(x-x_{2i+2})}{(x_{2i}-x_{2i+1})(x_{2i}-x_{2i+2})} & x_{2i}\leqslant x\leqslant x_{2i+2}\ (i=n\ \text{时略去}),\\ 0 & \text{在}\ [x_{2i-2},\ x_{2i+2}]\ \text{外};\end{cases}$$

$$l_{2i+1}(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-x_{2i})(x-x_{2i+2})}{(x_{2i+1}-x_{2i})(x_{2i+1}-x_{2i+2})} & x_{2i}\leqslant x\leqslant x_{2i+2},\\ 0 & \text{在}\ [x_{2i},\ x_{2i+2}]\ \text{外}.\end{cases} \tag{3.1}$$

令 $h_i=x_{i+1}-x_i$，设节点间距满足

$$\max(h_{2i},\ h_{2i+1})/\min(h_{2i},\ h_{2i+1})\leqslant M<+\infty. \tag{3.2}$$

通过分析计算，可估得

$$\|l_{2i}(x)\|_\infty\leqslant\max\left(1,\ \frac{M}{4}\right), \tag{3.3a}$$

$$\|l_{2i+1}(x)\|_\infty\leqslant\frac{3}{4}+\frac{M}{4}. \tag{3.3b}$$

由于任意一点 $x\in[x_{2i},\ x_{2i+2}]$ 只有 $l_{2i}(x)$，$l_{2i+1}(x)$，$l_{2i+2}(x)$ 不为零，故由(3.3a)，(3.3b)估得

$$\lambda_n\leqslant\max\left(2,\ \frac{M}{2}\right)+\frac{3}{4}+\frac{M}{4}. \tag{3.4}$$

从而根据引理 1 得出

定理 4. 当节点间距对 n 一致满足条件(3.2)时，分段二次插值过程稳定.

分段三次 Hermite 插值

设给定数据 $f(x_i)$，$f'(x_i)(0\leqslant i\leqslant n)$，现分别对每个小段 $[x_i,\ x_{i+1}]$ 利用两端点的数据进行三次插值，也就是说，$S_n\subset c^1[a,\ b]$，S_n 的元素在每个 $[x_i,\ x_{i+1}]$ 上是三次多项式. 这时插值基函数根据定义(1.14)可表为

$$l_i(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)^2\left(1+2\dfrac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}\right) & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i\ (i=0\ \text{时略去}),\\ \left(\dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2\left(1+2\dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right) & x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}\ (i=n\ \text{时略去}),\\ 0 & \text{在}\ [x_{i-1},\ x_{i+1}]\ \text{外};\end{cases} \tag{3.5a}$$

$$\bar{l}_i(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)^2(x-x_i) & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i\ (i=0\ \text{时略去}),\\ \left(\dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2(x-x_i) & x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}\ (i=n\ \text{时略去}),\\ 0 & \text{在}\ [x_{i-1},\ x_{i+1}]\ \text{外}.\end{cases} \tag{3.5b}$$

当 $x\in[x_i,\ x_{i+1}]$ 时，只有 $l_i(x)$，$l_{i+1}(x)$，$\bar{l}_i(x)$，$\bar{l}_{i+1}(x)$ 不为零，故在 $[x_i,\ x_{i+1}]$ 上插

值函数可表为

$$I_n[f;\ x] = f(x_i)l_i(x) + f(x_{i+1})l_{i+1}(x) + f'(x_i)\tilde{l}_i(x) + f'(x_{i+1})\tilde{l}_{i+1}(x). \tag{3.6}$$

通过分析计算，当 $x \in [x_i,\ x_{i+1}]$ 时，有如下一些估计式：

$$0 \leqslant l_i(x) \leqslant 1, \qquad l_i(x) + l_{i+1}(x) = 1, \tag{3.7a}$$

$$|\tilde{l}_j(x)| \leqslant \frac{4}{27} h_i, \qquad j = i,\ i+1, \tag{3.7b}$$

$$h_i|l_j'(x)| \leqslant 3/2, \qquad j = i,\ i+1, \tag{3.7c}$$

$$|\tilde{l}_i'(x)| + |\tilde{l}_{i+1}'(x)| \leqslant 2/3. \tag{3.7d}$$

令 $h = \max\limits_i h_i$，由(3.6)，(3.7a)，(3.7b) 可得

$$\|I_n[f;x]\|_\infty \leqslant \frac{35}{27} \max_{0\leqslant i\leqslant n} \{|f(x_i)|,\ h|f'(x_i)|\}. \tag{3.8}$$

由 (3.7a)，在 $[x_i,\ x_{i+1}]$ 上有 $-l_i'(x) = l_{i+1}'(x)$，故有

$$I_n'[f;\ x] = -l_i'(x)h_i f[x_i,\ x_{i+1}] + f'(x_i)\tilde{l}_i'(x) + f'(x_{i+1})\tilde{l}_{i+1}'(x). \tag{3.9}$$

由 (3.7c)，(3.7d) 可估得

$$\|I_n'[f;\ x]\|_\infty \leqslant \frac{13}{6} \max_i\{|f[x_i,\ x_{i+1}]|,\ |f'(x_i)|\}. \tag{3.10}$$

由定义 3，定义 4 及(3.8)，(3.10)即得

定理 5. 分段三次 Hermite 插值，插值函数及其一阶导数均稳定.

三次样条插值

这里只讨论周期边界条件，其它各种边界条件亦可类似地得到稳定性结论.

设给定插值节点为 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 插值函数族 S_n 是以 x_i 为分点的三次周期样条全体，即若 $\varphi \in S_n$，则 φ 是属于 $c^2(-\infty,\ +\infty)$ 的周期函数，周期 $T = (b-a)$，并且 φ 在每个小区间 $[x_i,\ x_{i+1}]$ 是三次多项式.

给定数据 $f(x_i)$，$0 \leqslant i \leqslant n-1$（由周期条件有 $f(x_n) = f(x_0)$），即可唯一确定 $f(x)$ 在 S_n 的插值函数 $I_n[f;\ x]$. 令

$$m_i = I_n'[f;\ x_i] \quad (0 \leqslant i \leqslant n-1),$$

利用 $I_n''[f;\ x]$ 在节点 x_i 上的连续性条件及边界点 x_0，x_n 的周期条件，可推得 m_i 满足方程(可参阅[4])

$$Am = g, \tag{3.11}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \mu_0 & & & \lambda_0 \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ \mu_{n-1} & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix}, \tag{3.11a}$$

$$\lambda_i = \frac{h_i}{h_{i-1}+h_i}, \quad \mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}, \tag{3.11b}$$

$$g_i = 3\lambda_i f[x_{i-1},\ x_i] + 3\mu_i f[x_i,\ x_{i+1}]. \tag{3.11c}$$

由周期条件数据 $f(x_{-1})=f(x_{n-1})$, $h_{-1}=h_{n-1}$.

对应向量范数 $\|x\|_\infty=\max\limits_i|x_i|$，相应地有矩阵范数 $\|A\|_\infty=\max\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$. 当矩阵元素满足条件:

$$|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\quad 1\leqslant i\leqslant n$$

时,不难从定义直接证明(可参阅[4])

$$\|A^{-1}\|_\infty\leqslant\left[\min_i\left(|a_{ii}|-\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\right)\right]^{-1}.$$

故(3.11a)的矩阵 A 满足 $\|A^{-1}\|\leqslant 1$，从而得

$$\|m\|_\infty=\|A^{-1}g\|_\infty\leqslant\|g\|_\infty. \tag{3.12}$$

由 (3.11b), (3.11c) 有

$$\|g\|_\infty\leqslant 3\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}|f[x_i,\ x_{i+1}]|\leqslant\frac{6}{\min\limits_i h_i}\max_i|f(x_i)|. \tag{3.13}$$

m_i 确定后,可借用 Hermite 型插值公式(3.6)表示三次样条插值,得

$$I_n[f;\ x]=f(x_i)l_i(x)+f(x_{i+1})l_{i+1}(x)$$
$$+m_i\tilde{l}_i(x)+m_{i+1}\tilde{l}_{i+1}(x),\quad x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}.$$

令 $h=\max\limits_i h_i$, $\Delta=\min\limits_i h_i$, 从(3.8),(3.12),(3.13)即得

$$\|I_n[f;\ x]\|_\infty\leqslant\frac{35}{27}\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}\{|f(x_i)|,\ h|m_i|\}$$
$$\leqslant\frac{70}{9}\frac{h}{\Delta}\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}|f(x_i)| \tag{3.14}$$

又由(3.10),(3.12),(3.13)可得

$$\|I'_n[f;\ x]\|_\infty\leqslant\frac{13}{6}\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}\{|f[x_i,\ x_{i+1}]|,\ |m_i|\}$$
$$\leqslant\frac{13}{2}\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}|f[x_i,\ x_{i+1}]|. \tag{3.15}$$

现进一步考察二阶三阶导数,令 $M_i=I''_n[f;\ x_i]$，利用一阶导数 $I'_n[f;\ x]$ 在 x_i 的连续性及边界上的周期条件,可推得 M_i 满足方程

$$BM=d, \tag{3.16}$$

其中

$$B=\begin{bmatrix}2 & \lambda_0 & & & \mu_0\\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2}\\ \lambda_{n-1} & & & \mu_{n-1} & 2\end{bmatrix}, \tag{3.16a}$$

$$d_i=6f[x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1}]. \tag{3.16b}$$

λ_i 与 μ_i 如同 (3.11b) 所定义.

因 $\|B^{-1}\|_\infty \leqslant 1$，可从 (3.16)，(3.16b) 得

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}|M_i|\leqslant 6\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}|f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]|. \tag{3.17}$$

由于 $I_n''[f; x]$ 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是线性函数，并且满足 $I_n''[f; x_i] = M_i$，故成立

$$I_n''[f; x] = \frac{M_i(x_{i+1}-x)}{h_i} + \frac{M_{i+1}(x-x_i)}{h_i}, \quad x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}. \tag{3.18}$$

由(3.17)，(3.18)即得

$$\|I_n''[f; x]\|_\infty \leqslant 6\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}|f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]|. \tag{3.19}$$

令

$$\widetilde{M}_i = 2f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}], \tag{3.20}$$

则有

$$B\widetilde{M} = \tilde{d}. \tag{3.21}$$

$\tilde{d}$ 的分量为

$$\tilde{d}_i = \mu_i\widetilde{M}_{i-1} + 2\widetilde{M}_i + \lambda_i\widetilde{M}_{i+1}, \tag{3.21a}$$

于是有

$$B(\widetilde{M} - M) = \tilde{d} - d. \tag{3.22}$$

从 (3.21a)，(3.16b) 推得

$$\begin{aligned}\tilde{d}_i - d_i = &-2\mu_i(x_{i+1}-x_{i-2})f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]\\ &+ 2\lambda_i(x_{i+2}-x_{i-1})f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}].\end{aligned} \tag{3.22a}$$

由 (3.22)，(3.22a) 得

$$\|\widetilde{M} - M\|_\infty \leqslant 6h\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}|f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]|. \tag{3.23}$$

(3.23) 牵涉到的 $f(x_{n+1})$，$f(x_{n+2})$，根据周期条件取为 $f(x_1)$，$f(x_2)$.

根据 (3.18)，在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上有

$$\begin{aligned}I_n'''[f; x] &= \frac{1}{h_i}(M_{i+1} - M_i)\\ &= \frac{1}{h_i}[(M_{i+1}-\widetilde{M}_{i+1}) + (\widetilde{M}_{i+1}-\widetilde{M}_i) + (\widetilde{M}_i - M_i)].\end{aligned}$$

由(3.20)，(3.23)即得

$$\|I_n'''[f; x]\|_\infty \leqslant 18\frac{h}{\Delta}\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}|f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]|. \tag{3.24}$$

至此，总合(3.14)，(3.15)，(3.19)，(3.24)可得

定理 6. 当节点间距对 n 一致满足

$$\max_i h_i/\min_i h_i \leqslant M < +\infty$$

时，三次周期样条插值函数本身以及各阶导数均稳定.

可以类似地证明，在其它边界条件下亦有同样结果.

李家楷同志对本文提了许多宝贵意见，作者表示感谢.

参 考 文 献

[1] 冯康等编，数值计算方法，1978.
[2] И. П. 纳唐松，函数构造论，1949.
[3] B. Wendroff, Theoretical Numerical Analysis, 1975.
[4] 南京大学数学系计算数学专业编，数值逼近方法，1978.