# 混合元解重调和方程的条件数*

黄鸿慈　桂文庄

(中国科学院计算中心)

# THE CONDITION NUMBER OF MIXED FINITE ELEMENT APPROXIMATION FOR A BIHARMONIC EQUATION

Huang Hong-ci　Gui Wen-zhuang

*(Computing Center, Academia Sinica)*

**Abstract**

It is proved that the condition number of mixed finite element approximation for a biharmonic equation is of order $O(h^{-2})$. Compared with a direct discretization, of which the condition number of the coefficient matrix is of order $O(h^{-4})$, the mixed finite element method is much more stable.

考虑重调和方程第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta^2\phi = f, & (x, y)\in\Omega,\\ \phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial n} = 0, & (x, y)\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{1}$$

$\Omega$ 是 $R^2$ 中的有界多边形区域. 根据 [1, 381—424],问题可转化为

$$\begin{cases}\text{找 } (u, \phi)\in H^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega),\ \text{使成立}\\ \displaystyle\int uv - \int\nabla\phi\nabla v = 0, \quad \forall\ v\in H^1(\Omega),\\ \displaystyle -\int\nabla u\nabla\varphi = -\int f\cdot\varphi, \quad \forall\ \varphi\in H_0^1(\Omega),\end{cases}\tag{2}$$

$\int f$ 表示函数 $f$ 在 $\Omega$ 上的积分. 问题(2)的解 $(u,\phi)$ 满足 $u=-\Delta\phi$,其中 $\phi$ 是(1)的解. 对(2)进行有限元逼近就称为问题(1)的混合元方法. 在[1]—[3]中对这种逼近的收敛性作了研究,[1]中还讨论了离散化方程的 Uzawa 迭代求解. 在[4]中用矩阵工具讨论求解方法,提出了加速方案并从理论上获得收敛速度,证明加速后的迭代方法在运算量上比通常的消去法有更好的阶. 本文沿用[4]中采用的矩阵方法,证明混合元离散化方程的条件数是 $O(h^{-2})$,而重调和方程直接离散化的条件数是 $O(h^{-4})$. 因此混合元在稳定性方

* 1984 年 4 月 19 日收到.

面亦优越.

设 $X_h, X_{0h}$ 是有限元空间，$X_h \subset H^1(\Omega)$，$X_{0h} = \{v_h \in X_h;\ v_h = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上$\}$.现建立问题(2)的逼近方程

$$\begin{cases} \text{找 } (u_h, \phi_h) \in X_h \times X_{0h}, \text{使得} \\ \int u_h \cdot v_h - \int \nabla\phi_h \cdot \nabla v_h = 0, \quad \forall\ v_h \in X_h, \\ -\int \nabla u_h \cdot \nabla\varphi_h = -\int f \cdot \varphi_h, \quad \forall\ \varphi_h \in X_{0h}. \end{cases} \tag{3}$$

设 $X_{0h}$ 和 $X_h$ 的基函数分别是 $\{e_1, \cdots, e_m\}$ 和 $\{e_1, \cdots, e_m, e_{m+1}, \cdots, e_n\}$，于是问题(3)的解可表为

$$u_h = \sum_{j=1}^{n} U_j e_j,$$

$$\phi_h = \sum_{j=1}^{m} \Psi_j e_j.$$

令 $U = [U_1, \cdots, U_n]^T$, $\Psi = [\Psi_1, \cdots, \Psi_m]^T$，问题(3)可写成矩阵形式

$$\begin{cases} NU + M^T\Psi = 0, \\ MU = F. \end{cases} \tag{4}$$

矩阵 $N = [N_{i,j}] \in R^{n\times n}$ 是正定矩阵，$M = [M_{i,j}] \in R^{m\times n}$ 是列满秩矩阵，其中

$$N_{i,j} = \int e_i e_j, \quad i, j = 1, \cdots, n, \tag{4.a}$$

$$M_{i,j} = -\int \nabla e_i \nabla e_j, \quad i = 1, \cdots, m;\ j = 1, \cdots, n, \tag{4.b}$$

$$F_i = -\int f e_i, \quad i = 1, \cdots, m.$$

假定三角剖分满足正则性条件,即所有内角都不小于一常数 $\theta_0 > 0$,并同时满足反假设条件

$$h/\tau \leqslant \gamma_0, \tag{5}$$

$h$ 和 $\tau$ 分别表示三角剖分的最大和最小边长. 考虑 $X_h$ 是由一次或二次拉格朗日插值方式产生的有限元空间，这时插值基函数 $e_i$ 不仅具有局部区域不为零的性质，而且是非负的,加上正则性条件及反假设条件(5),可证明：对任意

$$v_h = \sum_{j=1}^{n} V_j e_j \in X_h,$$

成立

$$c_2 h^2 \|V\|^2 \leqslant \int v_h^2 \leqslant c_1 h^2 \|V\|^2, \tag{6}$$

$\|\cdot\|$表示欧氏范数,常数 $c_1$, $c_2$ 与插值阶数及 $\theta_0$, $\gamma_0$ 有关. 由(4.a)知,$(NV, V) = \int v_h^2$,故从(6)即得矩阵$N$的范数及最小特征值的界如下:

$$\|N\| = \sup_{V\in R^n} \frac{|(NV, V)|}{\|V\|^2} \leqslant c_1 h^2, \tag{6.a}$$

$$\mu_N^1=\inf_{V\in R^n}\frac{|(NV,V)|}{\|V\|^2}\geqslant c_2h^2. \tag{6.b}$$

令

$$L=\begin{bmatrix}N & M^T\\ M & 0\end{bmatrix},$$

即混合元方程(4)或(3)的系数矩阵．在以上假设下，首先有

**引理 1.** 当 $h\to 0$ 过程中，$\|L\|$ 有常数的上界和下界．

证明．令 $Q=\begin{bmatrix}V\\ \Phi\end{bmatrix}\in R^{n+m}$，函数 $v_h$, $\varphi_h$ 与向量 $V$, $\Phi$ 有关系

$$v_h=\sum_{j=1}^n V_je_j,\qquad \varphi_h=\sum_{j=1}^m \Phi_je_j.$$

因 $L$ 对称，由范数定义有 $\|L\|=\sup\limits_{Q\in R^{n+m}}\dfrac{|(LQ,Q)|}{\|Q\|^2}$，其中

$$(LQ,Q)=(NV,V)+2(MV,\Phi).$$

由反不等式[1,139-143]及不等式(6)的右半部分，得到

$$|(MV,\Phi)|=\left|\int\nabla v_h\nabla\varphi_h\right|\leqslant\frac{1}{2}\int|\nabla v_h|^2+|\nabla\varphi_h|^2$$

$$\leqslant ch^{-2}\int v_h^2+\varphi_h^2\leqslant c'(\|V\|^2+\|\Phi\|^2).$$

由 (6.a) 知 $(NV,V)\leqslant c_1h^2\|V\|^2$，从而证得 $\|L\|$ 有常数上界．

关于 $\|L\|$ 存在常数下界的情况，以线性元为例证明，二次元的证法类似．

令 $v_h=\varphi_h$，于是有

$$|(LQ,Q)|\geqslant 2\int|\nabla\varphi_h|^2-\int\varphi_h^2.$$

取 $\varphi_h$ 为这样的插值函数：在某一格网结点 $p_0$ 上 $\varphi_h(p_0)=1$，其它结点上 $\varphi_h=0$．这时可算得以 $p_0$ 为顶点的任一三角元 $\Delta_0$ 上恒有

$$\int_{\Delta_0}|\nabla\varphi_h|^2\geqslant(1-\cos\theta_0),$$

$\theta_0$ 是正则剖分的常数．这时 $\int\varphi_h^2\leqslant O(h^2)$，$\|Q\|^2=1$，也就是说存在向量 $Q$，使

$$\frac{|(LQ,Q)|}{\|Q\|^2}\geqslant c(1-\cos\theta_0)+O(h^2).$$

因而存在常数 $h_0$，当 $h\leqslant h_0$ 时 $\|L\|$ 有常数下界．证毕．

**引理 2.** 令 $\mu^1_{\sqrt{MM^T}}$ 表示矩阵 $\sqrt{MM^T}$ 的最小特征值，则成立

$$\mu^1_{\sqrt{MM^T}}\geqslant c_3h^2. \tag{7}$$

证明．对任意 $\Phi\in R^m$，成立

$$\|M^T\Phi\|=\sup_{V\in R^n}\frac{|(V,M^T\Phi)|}{\|V\|}=\sup_{V\in R^n}\frac{\left|\int\nabla v_h\nabla\varphi_h\right|}{\|V\|}.$$

取 $v_h=\varphi_h$，由 Friedrichs 不等式及(6)的左半部分，得到

$$\|M^T\Phi\| \geqslant \frac{\int |\nabla \varphi_h|^2}{\|\Phi\|} \geqslant \frac{c\int \varphi_h^2}{\|\Phi\|} \geqslant c_3 h^2 \|\Phi\|. \tag{7.a}$$

由于 $\mu^1_{\sqrt{MM^T}} = \inf\limits_{\Phi \in R^m} \dfrac{\|M^T\Phi\|}{\|\Phi\|}$,即得所证.

**引理** 3. 对 $L^{-1}$ 存在常数 $d_1$, $d_2$, 使成立

$$d_2 h^{-2} \leqslant \|L^{-1}\| \leqslant d_1 h^{-2}.$$

证明. 取向量 $Q = \begin{bmatrix} V \\ \Phi \end{bmatrix}$ 中的 $\Phi = 0$,得到 $(LQ, Q) = (NV, V)$,对任意 $V \in R^n$,由 (6.a) 得

$$\frac{1}{\|L^{-1}\|} = \inf_{Q \in R^{n+m}} \frac{|(LQ, Q)|}{\|Q\|^2} \leqslant \frac{|(NV, V)|}{\|V\|^2} \leqslant c_1 h^2.$$

从而即证得引理不等式的左半部分. 下面证明右半部分.

对任一向量 $P = \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} \in R^{n+m}$, 令 $Q = L^{-1}P = \begin{bmatrix} V \\ \Phi \end{bmatrix}$,亦即成立

$$\begin{cases} NV + M^T\Phi = F, & (8.a) \\ MV = G. & (8.b) \end{cases}$$

取 $W = M^T(MM^T)^{-1}G$, 由引理 2 有

$$\begin{aligned} \|W\| &\leqslant \|M^T(MM^T)^{-1}\| \ \|G\| = \sqrt{\|(MM^T)^{-1}\|}\|G\| \\ &= \frac{1}{\mu^1_{\sqrt{MM^T}}} \|G\| \leqslant \|G\|/c_3 h^2. \end{aligned} \tag{9}$$

由于$W$是 (8.b) 的一个特解,故方程组(8.a), (8.b)的解$Q$的分量$V$可表成 $V = W + z^0$, $z^0 \in \mathrm{Ker}(M)$. 代入(8.a), 得

$$Nz^0 = F - NW - M^T\Phi. \tag{10}$$

设 $\{z_j\}_{j=1}^{n-m}$ 是 $\mathrm{Ker}(M)$的一组正交基,矩阵 $Z$ 的列向量由 $z_j$ 组成,即 $Z = [z_1, \cdots, z_{n-m}]$. 于是有 $MZ = 0$ 或 $Z^TM^T = 0$. 以 $Z^T$ 乘方程(10),得到

$$Z^TNz^0 = Z^TF - Z^TNW. \tag{11}$$

因 $\|Z^T\| = 1$, 又由于(6.a) 和(9),得到

$$\|Z^TNz^0\| \leqslant \|F\| + \|N\|\|W\| \leqslant c(\|F\| + \|G\|). \tag{12}$$

$z^0$ 可表为 $Zq^0, q^0 \in R^{n-m}$, 并且 $\|z^0\| = \|q^0\|$,从而又得到

$$\|Z^TNz^0\| = \|Z^TNZq^0\| \geqslant \mu^1_{Z^TNZ}\|q^0\| = \mu^1_{Z^TNZ}\|z^0\|.$$

但 $\mu^1_{Z^TNZ} \geqslant \mu^1_N$,故 $\|z^0\| \leqslant \|Z^TNz^0\|/\mu^1_N$. 于是从 (6.b), (9), (12) 得到

$$\|V\| \leqslant \|W\| + \|z^0\| \leqslant ch^{-2}(\|F\| + \|G\|). \tag{13}$$

从 (7.a),(8.a), (6.a), (13) 又得

$$\begin{aligned} \|\Phi\| &\leqslant \frac{1}{c_3 h^2} \|M^T\Phi\| \leqslant \frac{1}{c_3 h^2} (\|F\| + \|NV\|) \\ &\leqslant c' h^{-2}(\|F\| + \|G\|). \end{aligned} \tag{14}$$

故从(13),(14)即得

$$\|Q\| \leqslant d_1 h^{-2}\|P\|.$$

引理不等式的右半部分获证.

从引理 1 和引理 3 得到

**定理.** 混合元离散化方程(4)或(3)的系数矩阵 $L$ 的条件数满足

$$k_2h^{-2} \leqslant \|L\|\|L^{-1}\| \leqslant k_1h^{-2},$$

$k_1$、$k_2$ 是与 $h$ 无关的常数.

## 参 考 文 献


[1] P. G. Ciarlet, The finite element method for elliptic problems, North-Holland, 1978.

[2] P. G. Ciarlet, P. A. Raviart, A mixed finite element method for the biharmonic equation, in Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations (C. de Boor, Editor), Academic Press, New York, 1974, 125—145.

[3] R. Scholz, A mixed method for 4th order problems using linear finite elements, *RAIRO ser. Anal. Numer.*, **12** (1978), 85—90.

[4] Huang Hong-ci (黄鸿慈), A type of iterative methods for solving the finite element approximation of Saddle-point Problems, in Proceeding of the China-France Symposium on Finite Element Methods (Edited by Feng Kang and J. L. Lions), Science Press, Beijing, 1983, 306—322.