实对称矩阵的两类逆特征值问题[*1)]

孙继广
(中国科学院计算中心)

TWO KINDS OF INVERSE EIGENVALUE PROBLEMS FOR REAL SYMMETRIC MATRICES

Sun Ji-guang
(*Computing Center, Academia Sinica*)

Abstract

The following two kinds of inverse eigenvalue problems arising from structural design are discussed.

Problem SIELS: Given a real $n\times k$ matrix X_1 $(1\leqslant k<n)$, a real diagonal matrix $\Lambda_1=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$ and two real $n\times n$ symmetric matrices K^* and M^* in which M^* is positive definite, find a real $n\times n$ symmetric matrix K minimizing $\|K-M^*X_1\Lambda_1\|_F$ and $\|K^*-K\|_F$.

Problem SIEP: Given a full rank real $n\times k$ matrix X_1 and a real diagonal matrix $\Lambda_1=\mathrm{diag}(\lambda_1 I^{(k_1)},\cdots,\lambda_l I^{(k_l)})$ with $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_l$ and $k_1+\cdots+k_l<n$, find two real symmetric matrices K and M in which M is positive definite such that

(i) $KX_1=MX_1\Lambda_1$,

(ii) $\underbrace{\lambda_1,\cdots,\lambda_1}_{k_1},\cdots,\underbrace{\lambda_l,\cdots,\lambda_l}_{k_l}$ are the k smallest eigenvalues of the generalized eigenvalue problem $Kx=\lambda Mx$, and the other eigenvalues of $Kx=\lambda Mx$ are located in $[\lambda_l+\delta,+\infty)$, where δ is a given positive number.

The expressions of solutions to Problem SIELS and Problem SIEP are given, the numerical methods are described and numerical experiments are included.

§1. 两类逆特征值问题

先说明一些记号. $\mathbf{R}^{m\times n}$ 是所有 $m\times n$ 实矩阵的全体, $\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^{n\times 1}$, $\mathbf{R}=\mathbf{R}^1$; $S\mathbf{R}^{n\times n}$ 是

* 1986 年 10 月 8 日收到.
1) 中国科学院科学基金资助的课题.

所有 $n\times n$ 实对称矩阵的全体；$OR^{n\times n}$ 是所有 $n\times n$ 实正交矩阵的全体；$I^{(n)}$ 是 n 阶单位矩阵；A^T 是矩阵 A 的转置；$A>0$ 表示 A 是正定的实对称矩阵．$\mathscr{R}(A)$ 是矩阵 A 的列空间；$A^{\dagger}$ 是矩阵 A 的 Moore-Penrose 广义逆；$P_A=AA^{\dagger}$ 表示到 $\mathscr{R}(A)$ 的正交投影．$\lambda(A)$ 是 A 的特征值的全体；$\lambda(K, M)$ 是广义特征值问题 $Kx=\lambda Mx$ 的特征值的全体；$\|\ \|_F$ 是矩阵的 Frobenius 范数．此外，对于 $A=(\alpha_{ij})$，$B=(\beta_{ij})\in R^{n\times n}$，$A*B$ 表示 A 与 B 的 Hadamard 积，其定义为 $A*B=(\alpha_{ij}\beta_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$．

在振动设计中，往往需要修改一个系统的数学模型的物理参数，这在数学上可以归结为矩阵的逆特征值问题(见[1])．本文试就其中比较典型的两类，讨论求解的方法．

问题 SIELS. 已给 $K^*, M^*\in SR^{n\times n}$，$X_1\in R^{n\times k}$ 和 $\Lambda_1=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_l)$，其中 $M^*>0$，$\lambda_j\in R$，$\forall j$，$1\leqslant k<n$．令

$$\mathscr{K}=\{K\in SR^{n\times n}:\ \|KX_1-M^*X_1\Lambda_1\|_F=\min\}. \tag{1.1}$$

求 $K_{LS}\in\mathscr{K}$，使得

$$\|K^*-K_{LS}\|_F=\inf_{K\in\mathscr{K}}\|K^*-K\|_F. \tag{1.2}$$

问题 SIEP. 已给 $X_1\in R^{n\times k}$ 和 $\Lambda_1=\operatorname{diag}(\lambda_1 I^{(k_1)},\cdots,\lambda_l I^{(k_l)})$，其中 $\operatorname{rank}(X_1)=k$，$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_l$，$k_1+\cdots+k_l=k<n$．求 $K, M\in SR^{n\times n}$，其中 $M>0$，满足下列条件：

(i) $KX_1=MX_1\Lambda_1$． (1.3)

(ii) $\underbrace{\lambda_1,\cdots,\lambda_1}_{k_1},\ \cdots,\ \underbrace{\lambda_l,\cdots,\lambda_l}_{k_l}$ 是 $\lambda(K, M)$ 中最小的 k 个值，并且

$$\lambda(K, M)\backslash\lambda(\Lambda_1)\subset[\lambda_l+\delta, +\infty), \tag{1.4}$$

其中 δ 是指定的某一正数．

下面分别讨论这两类问题的解法，并给出算例．

§2. 问题 SIELS 的解法

首先考虑一类矩阵最小二乘问题．

问题 SMLS. 已给 $A^*\in SR^{n\times n}$，$X_1, B\in R^{n\times k}$，其中 $1\leqslant k<n$．令

$$\mathscr{L}=\{A\in SR^{n\times n}:\ \|AX_1-B\|_F=\min\}. \tag{2.1}$$

求 $A_{LS}\in\mathscr{L}$，使得

$$\|A^*-A_{LS}\|_F=\inf_{A\in\mathscr{L}}\|A^*-A\|_F. \tag{2.2}$$

参照[3]中的办法，可证下述结果．

定理 2.1. 设问题 SMLS 中 X_1 的奇异值分解为

$$X_1=U\begin{pmatrix}\Sigma_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}V^T, \tag{2.3}$$

其中

$$U=(\underset{r}{U_1},\underset{n-r}{U_2})\in OR^{n\times n},\quad V=(\underset{r}{V_1},\underset{k-r}{V_2})\in OR^{k\times k},\quad \Sigma_1=\operatorname{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_r)>0.$$

令

$$\varphi_{ij}=\frac{1}{\sigma_i^2+\sigma_j^2},\quad 1\leqslant i,\ j\leqslant r,\quad \Phi=(\varphi_{ij})\in \mathbf{R}^{r\times r}, \tag{2.4}$$

则(2.1)式所定义的集合 $\mathscr{L}$ 可表示为

$$\mathscr{L}=\left\{U\begin{pmatrix}\Phi*(U_1^TBV_1\Sigma_1+\Sigma_1V_1^TB^TU_1) & \Sigma_1^{-1}V_1^TB^TU_2\\ U_2^TBV_1\Sigma_1^{-1} & A_{22}\end{pmatrix}U^T:\ A_{22}\in S\mathbf{R}^{(n-r)\times(n-r)}\right\}, \tag{2.5}$$

并且在 $\mathscr{L}$ 中存在唯一的元素 A_{LS} 使得(2.2)式成立，A_{LS} 的表达式为

$$A_{LS}=U\begin{pmatrix}\Phi*(U_1^TBV_1\Sigma_1+\Sigma_1V_1^TB^TU_1) & \Sigma_1^{-1}V_1^TB^TU_2\\ U_2^TBV_1\Sigma_1^{-1} & U_2^TA^*U_2\end{pmatrix}U^T. \tag{2.6}$$

在证明定理 2.1 之前，先证一条引理.

引理 2.1. 设 $G\in\mathbf{R}^{r\times r}$，$\Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_r)>0$，则问题

$$\|S\Sigma-G\|_F=\min \tag{2.7}$$

在 $S\mathbf{R}^{r\times r}$ 内存在唯一解

$$\hat{S}=\Phi*(G\Sigma+\Sigma G^T), \tag{2.8}$$

其中 Φ 按(2.4)式定义.

证明. 对于 $S=(s_{ij})\in S\mathbf{R}^{r\times r}$ 和 $G=(g_{ij})\in\mathbf{R}^{r\times r}$，展开

$$\|S\Sigma-G\|_F^2=\sum_{i=1}^{r}(s_{ii}\sigma_i-g_{ii})^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}[(\sigma_i^2+\sigma_j^2)s_{ij}^2-2(\sigma_ig_{ji}+\sigma_jg_{ij})s_{ij}+(g_{ij}^2+g_{ji}^2)].$$

由此即可得出问题(2.7)的唯一解 $\hat{S}=(\hat{s}_{ij})\in S\mathbf{R}^{r\times r}$，其中

$$\hat{s}_{ij}=\frac{g_{ij}\sigma_j+\sigma_ig_{ji}}{\sigma_i^2+\sigma_j^2},\quad 1\leqslant i,\ j\leqslant r.$$

证毕.

定理 2.1 的证明.

1) 由 $X_1(I-P_{X_1^T})=0$ 可知

$$\begin{aligned}\|AX_1-B\|_F^2&=\|P_{X_1^T}B^T-X_1^TA+(I-P_{X_1^T})B^T\|_F^2\\&=\|P_{X_1^T}B^T-X_1^TA\|_F^2+\|(I-P_{X_1^T})B^T\|_F^2;\end{aligned} \tag{2.9}$$

因此，(2.1)式所示集合 $\mathscr{L}$ 可表示为

$$\mathscr{L}=\{A\in S\mathbf{R}^{n\times n}:\ \|AX_1-BP_{X_1^T}\|_F=\min\}. \tag{2.10}$$

利用 X_1 的奇异值分解(2.3)，有

$$\|AX_1-BP_{X_1^T}\|_F=\left\|U^TAU\begin{pmatrix}\Sigma_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}-U^TBV\begin{pmatrix}I^{(r)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\|_F. \tag{2.11}$$

记

$$U^TAU=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}^T\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{array}{l}r\\ n-r\end{array}\\ \begin{array}{cc}r & n-r\end{array}\end{array},\qquad U^TBV=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{array}{l}r\\ n-r\end{array}\\ \begin{array}{cc}r & k-r\end{array}\end{array}, \tag{2.12}$$

代入(2.11)，得到

$$\|AX_1-BP_{X_1^T}\|_F^2=\|A_{11}\Sigma_1-B_{11}\|_F^2+\|A_{21}\Sigma_1-B_{21}\|_F^2. \tag{2.13}$$

所以，对于任一矩阵 $A\in\mathscr{L}$，(2.12) 式中的子矩阵 $A_{11}\in S\mathbf{R}^{r\times r}$ 与 $A_{21}\in\mathbf{R}^{(n-r)\times r}$ 应满足

$$\|A_{11}\Sigma_1 - B_{11}\|_F = \min, \quad \|A_{21}\Sigma_1 - B_{21}\|_F = \min. \tag{2.14}$$

从(2.14)的第二式可解出

$$A_{21} = B_{21}\Sigma_1^{-1}; \tag{2.15}$$

将引理 2.1 应用到(2.14)的第一式，得到

$$A_{11} = \Phi * (B_{11}\Sigma_1 + \Sigma_1 B_{11}^T). \tag{2.16}$$

把(2.15)，(2.16)与(2.12)联系起来，便证明了(2.5)式.

2) 集合 $\mathscr{L}$ 显然是一凸集，所以在 $\mathscr{L}$ 内存在唯一的元素 A_{LS}，使得(2.2)式成立. 利用 $\mathscr{L}$ 的表示式(2.5)，可立即导出 A_{LS} 具有(2.6)式所示的形式. 证毕.

由(2.9)和(2.13)可知，对于问题 SMLS 中的 A^*, X_1 和 B，存在 $A \in S\mathbf{R}^{n\times n}$，使得

$$AX_1 = B \tag{2.17}$$

成立的必要与充分条件是

$$\text{(a)}\ (I - P_{X_1^T})B^T = 0, \quad \text{(b)}\ B_{11}\Sigma_1^{-1} = \Sigma_1^{-1}B_{11}^T. \tag{2.18}$$

条件 (a) 即

$$B = BX_1^{\dagger}X_1; \tag{2.19}$$

利用(2.12)的第二式和(2.3)，条件 (b) 可以等价地表示成

$$X_1^T B X_1^{\dagger} X_1 = X_1^{\dagger} X_1 B^T X_1. \tag{2.20}$$

容易看出，(2.19)与(2.20)等价于

$$B = BX_1^{\dagger}X_1, \quad X_1^T B = B^T X_1, \tag{2.21}$$

并且当 X_1 与 B 满足(2.21)式时，方程(2.17)的解集

$$\mathscr{S} = \left\{ U \begin{pmatrix} U_1^T B V_1 \Sigma_1^{-1} & \Sigma_1^{-1} V_1^T B^T U_2 \\ U_2^T B V_1 \Sigma_1^{-1} & A_{22} \end{pmatrix} U^T :\ A_{22} \in S\mathbf{R}^{r\times r} \right\}; \tag{2.22}$$

此外，在凸集 $\mathscr{S}$ 中，存在唯一的 $\hat{A}$，使得

$$\|A^* - \hat{A}\|_F = \inf_{A \in \mathscr{S}} \|A^* - A\|_F, \tag{2.23}$$

$\hat{A}$ 的表达式为

$$\hat{A} = U \begin{pmatrix} U_1^T B V_1 \Sigma_1^{-1} & \Sigma_1^{-1} V_1^T B^T U_2 \\ U_2^T B V_1 \Sigma_1^{-1} & U_2^T A^* U_2 \end{pmatrix} U^T$$

$$= P_{X_1} B X_1^{\dagger} + X_1^{\dagger T} B^T (I - P_{X_1}) + (I - P_{X_1}) B X_1^{\dagger} + (I - P_{X_1}) A^* (I - P_{X_1}).$$

利用(2.21)，可以把 $\hat{A}$ 表示成对称的形式：

$$\hat{A} = BX_1^{\dagger} + X_1^{\dagger T} B^T - \frac{1}{2} X_1^{\dagger T}(B^T X_1 + X_1^T B) X_1^{\dagger} + (I - P_{X_1}) A^* (I - P_{X_1}). \tag{2.24}$$

综合上述，便证明了下述结论.

定理 2.2. 对于问题 SMLS 中已给的 A^*, X_1 和 B，令

$$\mathscr{S} = \{A \in S\mathbf{R}^{n\times n} :\ AX_1 = B\},$$

则集合 $\mathscr{S}$ 非空的必要与充分条件是 X_1 与 B 满足(2.21)式，并且当 X_1 与 B 满足(2.21)式时，利用 X_1 的奇异值分解(2.3)，$\mathscr{S}$ 可用(2.22)表示；此外，在 $\mathscr{S}$ 中存在唯一的元素 $\hat{A}$，使得(2.23)式成立，$\hat{A}$ 的表达式为(2.24).

把定理 2.1 应用到问题 SIELS，立即得出

定理 2.3. 设问题 SIELS 中 X_1 的奇异值分解如(2.3)式所示，则在集合 $\mathscr{K}$ 中存在

唯一的元素 K_{LS}，使得(1.2)式成立，K_{LS} 的表达式为

$$K_{LS}=U\begin{pmatrix}\Phi*(U_1^TM^*X_1\Lambda_1V_1\Sigma_1+\Sigma_1V_1^T\Lambda_1X_1^TM^*U_1) & \Sigma_1^{-1}V_1^T\Lambda_1X_1^TM^*U_2\\ U_2^TM^*X_1\Lambda_1V_1\Sigma_1^{-1} & U_2^TK^*U_2\end{pmatrix}U^T. \tag{2.25}$$

注意到，当问题 SIELS 中的 $M^*=I^{(n)}$ 时，有

$$U_1^TM^*X_1\Lambda_1V_1\Sigma_1+\Sigma_1V_1^T\Lambda_1X_1^TM^*U_1=2\Sigma_1V_1^T\Lambda_1V_1\Sigma_1$$

和

$$U_2^TM^*X_1\Lambda_1V_1\Sigma_1^{-1}=0,$$

所以从定理 2.3 可得下述推论.

推论 2.1. 当问题 SIELS 中的 $M^*=I^{(n)}$ 时，利用 X_1 的奇异值分解(2.3)，解 K_{LS} 可表示为

$$K_{LS}=U\begin{pmatrix}2\Phi*\Sigma_1V_1^T\Lambda_1V_1\Sigma_1 & 0\\ 0 & U_2^TK^*U_2\end{pmatrix}U^T. \tag{2.26}$$

根据定理 2.3 和推论 2.1，得出

算法 2.1. 求解问题 SIELS 的步骤如下：

1) 对 X_1 进行奇异值分解，如(2.3)式所示.

2) 按照(2.4)式构造矩阵 Φ.

3) 利用(2.25)式(当 $M^*=I^{(n)}$ 时利用(2.26)式)计算 K_{LS}.

算例 2.1. $n=5$, $k=2$. 已给

$$K^*=\begin{pmatrix}10 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 9 & -1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 7 & 3 & -5\\ 3 & 2 & 3 & 12 & -1\\ 4 & -3 & -5 & -1 & 15\end{pmatrix}\in SR^{5\times5},\quad M^*=I^{(5)}$$

和

$$X_1=\begin{pmatrix}0.39 & 0.65\\ -0.37 & 0.20\\ -0.70 & 0.26\\ 0.12 & -0.66\\ -0.45 & -0.17\end{pmatrix},\quad \Lambda_1=\mathrm{diag}\,(2,7),$$

求问题 SIELS 的解 K_{LS}(这里的 K^* 选自 [4] p.223，K^* 的特征值与特征向量见 [4]，236—237).

作者按照算法 2.1 在 L-340 机上进行了计算. X_1 的奇异值分解为

$$X_1=U\begin{pmatrix}\Sigma_1\\ 0\end{pmatrix}V^T,$$

其中

$$\Sigma_1=\mathrm{diag}\,(1.07458,\ 1.03212).$$

(2.4)式所示的 Φ 为

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.433006 & 0.450452 \\ 0.450452 & 0.469363 \end{pmatrix}.$$

按照(2.26)式算得问题 SIELS 的近似解为

$$K_{LS} = \begin{pmatrix} 10.2128 & 0.918271 & 1.61419 & 3.01665 & 4.11595 \\ 0.91827 & 8.93922 & -0.934167 & 1.94290 & -3.13836 \\ 1.61419 & -0.934167 & 7.42439 & 2.91268 & -4.99994 \\ 3.01665 & 1.94290 & 2.91268 & 12.1482 & -1.12606 \\ 4.11595 & -3.13836 & -4.99994 & -1.12606 & 14.5962 \end{pmatrix}.$$

K_{LS} 的特征值为

$$2.00041,\ 6.99959,\ 9.35608,\ 15.8031,\ 19.1615;$$

K_{LS} 属于 2.00041 和 6.99959 的特征向量分别为

$$(0.380645,\ -0.388485,\ -0.679414,\ 0.102782,\ -0.481686)^T$$

和

$$(0.649468,\ 0.189883,\ 0.285666,\ -0.653671,\ -0.182321)^T.$$

此外，有

$$\|K_{LS}X_1 - X_1\Lambda_1\|_F = 0.641391$$

和

$$\|K^* - K_{LS}\|_F = 0.923648.$$

§3. 问题 SIEP 的解法

注意到，若 $K^T = K$，$M^T = M > 0$，则 $A = M^{-1}K$ 是可对角化矩阵；反之，任一可对角化矩阵 A 必可表示成一个正定对称矩阵 M^{-1} 和一个对称矩阵 K 的乘积（此种表示不唯一）. 因此，在讨论问题 SIEP 的解法之前，先考虑下述问题.

问题 DIEP. 已给 $X_1 \in \mathbf{R}^{n\times k}$ 和 $\Lambda_1 = \mathrm{diag}\,(\lambda_1 I^{(k_1)}, \cdots, \lambda_l I^{(k_l)})$，其中 $\mathrm{rank}\,(X_1) = k$，$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_l$，$k_1 + \cdots + k_l = k < n$. 求可对角化矩阵 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$，满足下列条件：

(i) $AX_1 = X_1\Lambda_1$　　(3.1)

(ii) $\underbrace{\lambda_1, \cdots, \lambda_1}_{k_1}, \cdots, \underbrace{\lambda_l, \cdots, \lambda_l}_{k_l}$ 是 $\lambda(A)$ 中最小的 k 个值，并且

$$\lambda(A)\backslash\lambda(\Lambda_1) \subset [\lambda_l + \delta, +\infty), \tag{3.2}$$

其中 δ 是指定的某一正数.

关于问题 DIEP 的求解，分析如下.

根据[2]与[3]（见[2]引理 1 与引理 2，[3]推论 1.2），方程(3.1)必有解 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$，并且解的一般形式为

$$A = X_1\Lambda_1X_1^\dagger + Z(I - P_{X_1}), \quad Z \in \mathbf{R}^{n\times n}. \tag{3.3}$$

设 X_1 的奇异值分解为

$$X_1 = U\begin{pmatrix}\Sigma_1\\0\end{pmatrix}V^T,\quad U = (\underset{k}{U_1}, \underset{n-k}{U_2}) \in OR^{n\times n},\quad V\in OR^{k\times k},$$
$$\Sigma_1 = \operatorname{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_k) > 0. \tag{3.4}$$

令

$$U^TZU = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{21} & Z_{22}\end{pmatrix}\begin{matrix}k\\n-k\end{matrix} \\ \begin{matrix}k & n-k\end{matrix}\end{array}, \tag{3.5}$$

代入(3.3)式可知,方程(3.1)的通解为

$$A = \left[U\begin{pmatrix}\Sigma_1V^T & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\Lambda_1 & V\Sigma_1^{-1}Z_{12}\\ 0 & Z_{22}\end{pmatrix}\left[U\begin{pmatrix}\Sigma_1V^T & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\right]^{-1}. \tag{3.6}$$

容易看出,为了使 A 为可对角化矩阵,并且满足(3.2),必须而且只需取(3.6)中的 Z_{22} 为

$$Z_{22} = G\Lambda_2G^{-1}, \tag{3.7}$$

其中 G 是 $\mathbf{R}^{(n-k)\times(n-k)}$ 中任一满秩矩阵,并且

$$\lambda(\Lambda_2) \subset [\lambda_l+\delta, +\infty). \tag{3.8}$$

综合上述,得到

定理 3.1. 利用 X_1 的奇异值分解(3.4),问题 DIEP 的通解 A 可用(3.6)式表出,其中 Z_{12} 是 $\mathbf{R}^{k\times(n-k)}$ 中任一矩阵,Z_{22} 如(3.7)和(3.8)式所示,G 是 $\mathbf{R}^{(n-k)\times(n-k)}$ 中任一满秩矩阵.

以下考虑问题 SIEP.

设 X_1 的奇异值分解如(3.4)式所示. 将 U^TMU 与 U^TKU 分别表示成

$$U^TMU = F^TF,\quad U^TKU = F^T\Lambda F, \tag{3.9}$$

其中 Λ 如下选取:

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2),\ \Lambda_2 = \operatorname{diag}(\lambda_{l+1}I^{(k_{l+1})},\cdots,\lambda_pI^{(k_p)}),\ \lambda_{l+1},\cdots,\lambda_p \geqslant \lambda_l+\delta. \tag{3.10}$$

令 $A = M^{-1}K$. 根据定理 3.1, F 应满足

$$F^{-1}\Lambda F = \begin{pmatrix}\Sigma_1V^T\Lambda_1V\Sigma_1^{-1} & Z_{12}\\ 0 & Z_{22}\end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

其中 Z_{12} 与 Z_{22} 如定理 3.1 中所述. 记

$$F = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12}\\ F_{21} & F_{22}\end{pmatrix}\begin{matrix}k\\n-k\end{matrix} \\ \begin{matrix}k & n-k\end{matrix}\end{array},$$

代入(3.11),则满秩矩阵 F 应满足下列方程:

$$\Lambda_1F_{11} = F_{11}\Sigma_1V^T\Lambda_1V\Sigma_1^{-1},\quad \Lambda_2F_{21} = F_{21}\Sigma_1V^T\Lambda_1V\Sigma_1^{-1}, \tag{3.12}$$

$$\Lambda_1F_{12} = F_{11}Z_{12} + F_{12}Z_{22},\quad \Lambda_2F_{22} = F_{21}Z_{12} + F_{22}Z_{22}. \tag{3.13}$$

根据 Λ_1 的已知形式和 $\lambda(\Lambda_1)\cap\lambda(\Lambda_2) = \varnothing$,从(3.12)可解出

$$F_{11} = \operatorname{diag}(L_1,\cdots,L_l)V\Sigma_1^{-1},\quad F_{21} = 0, \tag{3.14}$$

其中 $L_j\in\mathbf{R}^{k_j\times k_j}$ $(j=1,\cdots,l)$ 是可以任意选取的满秩矩阵. 将已经任意取定的 $Z_{12}\in \mathbf{R}^{k\times(n-k)}$ 和(3.7)式所示的 Z_{22} 代入(3.13)(这时 G 与 Λ_2 已任意取定, Λ_2 见(3.10)), F_{12} 和

F_{22} 应分别满足方程

$$\Lambda_1 F_{12} G - F_{12} G \Lambda_2 = F_{11} Z_{12} G \tag{3.15}$$

和

$$\Lambda_2 F_{22} G = F_{22} G \Lambda_2. \tag{3.16}$$

利用 $\lambda(\Lambda_1)\cap\lambda(\Lambda_2)=\varnothing$，从方程(3.15)可唯一解出 F_{12}；再由已经取定的 Λ_2（见(3.10)），从(3.16)可解出

$$F_{22} = \operatorname{diag}(L_{l+1}, \cdots, L_p) G^{-1}, \tag{3.17}$$

其中 $L_j \in \mathbf{R}^{k_j\times k_j}$ $(j=l+1,\cdots,p)$ 是可以任意选取的满秩矩阵。

综合上述，得到

定理 3.2. 利用 X_1 的奇异值分解(3.4)，可得到问题 SIEP 的通解

$$K = UF^T\Lambda FU^T, \quad M = UF^TFU^T. \tag{3.18}$$

(3.18)中的 Λ 如(3.10)式所示，$\lambda_{l+1},\cdots,\lambda_p$ 及 $k_{l+1},\cdots,k_p$ 可任意取定；矩阵 F 为

$$F = \begin{array}{c@{}l} \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} k \\ n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} & \end{array}, \tag{3.19}$$

子矩阵 F_{11} 与 F_{22} 分别如(3.14)与(3.17)式所示，其中 G 是在 $\mathbf{R}^{(n-k)\times(n-k)}$ 中任意取定的满秩矩阵，L_j 是在 $\mathbf{R}^{k_j\times k_j}$ 中任意取定的满秩矩阵 $(j=1,\cdots,p)$，矩阵 F_{12} 由方程(3.15)解出，其中 Z_{12} 是事先在 $\mathbf{R}^{k\times(n-k)}$ 中任意取定的矩阵。

根据定理 3.2，得出

算法 3.1. 求解问题 SIEP 的步骤如下：

1）对 X_1 进行奇异值分解(见(3.4))。

2）任意取定 $Z_{12}\in\mathbf{R}^{k\times(n-k)}$，满秩矩阵 $G\in\mathbf{R}^{(n-k)\times(n-k)}$ 和不小于 $\lambda_l+\delta$ 的 $p-l$ 个数 $\lambda_{l+1},\cdots,\lambda_p$，并构造矩阵

$$\Lambda_2 = \operatorname{diag}(\lambda_{l+1}I^{(k_{l+1})},\cdots,\lambda_p I^{(k_p)}),\quad k_{l+1}+\cdots+k_p = n-k;$$

然后，任意取定满秩矩阵 $L_j\in\mathbf{R}^{k_j\times k_j}$，$j=1,\cdots,p$。

3）分别按照(3.14)和(3.17)算出 F_{11} 和 F_{22}，再从方程(3.15)解出 F_{12}。

4）利用(3.19)式所示的 F，按照(3.18)计算 K 与 M。

算例 3.1. $n=3$，$k=2$。已给

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \delta = 1.$$

求问题 SIEP 的一组解 K，$M\in S\mathbf{R}^{3\times3}$，其中 $M>0$。

按照算法 3.1，计算如下：

1）X_1 有奇异值分解

$$X_1 = U\begin{pmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{pmatrix} V^T,$$

其中

$$U=\left(\begin{array}{cc|c}\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6}\\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3}\\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6}\end{array}\right)=(U_1 \vdots U_2),\ V=I^{(2)},\ \Sigma_1=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

2）取 $Z_{12}=(-4,0)^T$，$G=1$，$\Lambda_2=3$；然后，取 $L_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$L_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$L_3=1$.

3）按照(3.14)与(3.17)算出 $F_{11}=I^{(2)}$，$F_{22}=1$；再从方程(3.15)解出 $F_{12}=(1,0)^T$.

4）由(3.10)和(3.19)式知

$$\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

代入(3.18)，可算出

$$K=\begin{pmatrix}\frac{3-2\sqrt{2}}{6} & \frac{6-\sqrt{2}}{6} & \frac{3+2\sqrt{2}}{6}\\ \frac{6-\sqrt{2}}{6} & \frac{3+2\sqrt{2}}{3} & \frac{-6+\sqrt{2}}{6}\\ \frac{3+2\sqrt{2}}{6} & \frac{-6+\sqrt{2}}{6} & \frac{3-2\sqrt{2}}{6}\end{pmatrix},$$

$$M=\begin{pmatrix}\frac{7+2\sqrt{2}}{6} & \frac{2+\sqrt{2}}{6} & -\frac{1+2\sqrt{2}}{6}\\ \frac{2+\sqrt{2}}{6} & \frac{5-2\sqrt{2}}{3} & -\frac{2+\sqrt{2}}{6}\\ -\frac{1+2\sqrt{2}}{6} & -\frac{2+\sqrt{2}}{6} & \frac{7+2\sqrt{2}}{6}\end{pmatrix}.$$

参 考 文 献

[1] 高福安，宋增浩，刘瑞庆，逆特征值问题的分类、应用及参数敏感性研究，全国第一次逆特征值问题讨论会论文，1986 年 8 月，西安.

[2] 蒋正新，陆启韶，谱约束下的矩阵最佳逼近问题，计算数学，**8**(1986)，47—52.

[3] 孙继广，一类反特征值问题的最小二乘解，计算数学，**9**(1987)，206—216.

[4] J. H. Wilkinson, C. Reinsch, Linear Algelra, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1971.