关于 Morley 元的误差估计*

石 钟 慈[1)]

（中国科学院计算中心）

ON THE ERROR ESTIMATES OF MORLEY ELEMENT

Shi Zhong-ci

(Computing Center, Academia Sinica)

Abstract

New error estimates for both moments and rotations are given for the usual Morley plate element, which are obtained directly using nonconforming finite element techniques that differ from Arnold-Brezzi approach. The error bound for rotations is better than that of Arnold-Brezzi, while the bounds for moments in the two different approaches are identical.

§1. 引 言

解薄板弯曲问题的三角形 Morley 元是六十年代出现的一种非协调元[1]，它的形函数是完整的二次多项式，节点参数是单元顶点上的三个函数值及三边中点上的法向导数值．由于板弯曲问题的常应变是二次多项式，所以这是一个参数最少的非协调板元．由于 Morley 元的连续性很差，甚至不具备形函数在单元间的连续性，故，关于它的合法性一直受到怀疑．1975 年，Lascaux 与 Lesaint[2]第一次用严格的数学方法证明了 Morley 元的收敛性，并在假定真解属于 H^4 空间的情况下，给出了弯矩和位移的误差估计式．但是这个结果不能令人满意，因为对一般的多角形区域，甚至凸多角形域，不能期望真解属于 H^4．为此，Rannacher 想去掉真解属于 H^4 的假定，而改为真解属于 H^3，他在[3]中提出了弯矩和转角的新的改进的误差估计式．不久前，Arnoid 和 Brezzi[4] 在讨论混合元和非协调元的关系时，指出 Rannacher 在 [3] 中关于 Morley 元的误差估计式是不正确的．[4]中提出一种修改 Morley 元、证明它和某种混合元等价并从混合元所得的结果转而导出原来的 Morley 元在 H^3 假定下的误差估计式．

本文的目的，是直接从 Morley 元作为非协调元的角度出发，在 H^3 的条件下证明其收敛性并给出弯矩和转角的误差估计式．本文所得的弯矩估计式和 Arnold-Brezzi 的结

* 1989 年 7 月 26 日收到．

1）祝贺冯康教授七十寿辰．

果是一致的，但导出的方法更为直接简便．本文的转角估计式比 Arnold-Brezzi 的相应公式有所改进．

§2. 已有的若干结果

考虑薄板弯曲问题

$$\begin{cases}\Delta^2 u = f, & \text{在}\,\Omega\,\text{内}, \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{在边界}\,\partial\Omega\,\text{上},\end{cases} \tag{1}$$

这里假设 $f\in L^2(\Omega)$．问题(1)的弱形式为求 $u\in H_0^2(\Omega)$，使得

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v\in H_0^2(\Omega), \tag{2}$$

其中

$$a(u, v) = \int_\Omega [\Delta u\Delta v + (1-\sigma)(2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx})]dxdy,$$

$$(f, v) = \int_\Omega fvdxdy,$$

$0<\sigma<\dfrac{1}{2}$ 为 Poisson 比．

现在考虑问题(2)的 Morley 元解．为简单起见，假设区域 Ω 是多角形，将它剖分为三角形单元，满足通常的正则性条件和逆不等式[5]．设单元 K 的直径为 $h_K\leqslant h$．在每个单元 K 上给定形函数 v，它是一个完整的二次多项式，可由形函数 v 在单元顶点上的函数值 v_i 及三边中点上的法向导数值 $\left(\dfrac{\partial v}{\partial n}\right)_i$ 唯一确定．在外边界 $\partial\Omega$ 上，所有节点参数均取为零．设由此构成的有限元空间为 V_h，则用 Morley 元求解问题(2)就是求 $u_h\in V_h$，使得

$$a_h(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall\ v_h\in V_h, \tag{3}$$

其中

$$a_h(u, v) = \sum_K\int_K [\Delta u\Delta v + (1-\sigma)(2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx})]dxdy.$$

命题 I (Lascaux-Lesaint[2])．若真解 $u\in H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)$，则

$$|u-u_h|_{2,h}\leqslant Ch(|u|_3 + h|u|_4); \tag{4}$$

且若 Ω 是凸的，则

$$|u-u_h|_0\leqslant Ch^2(|u|_3 + h|u|_4), \tag{5}$$

其中

$$|w|_{2,h}^2 := \sum_K |w|_{2,K}^2.$$

命题 II (Rannacher[3])．若真解 $u\in H^3(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)$，则

$$|u-u_h|_{2,h}\leqslant Ch|u|_3; \tag{6}$$

且若 Ω 是凸的，则

$$|u-u_h|_{1,h}\leqslant Ch^2|u|_3, \tag{7}$$

其中

$$|w|_{1,h}^2:=\sum_K|w|_{1,K}^2.$$

命题 III (Arnold-Brezzi [4]). 若真解 $u\in H^3(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)$, 则

$$|u-u_h|_{2,h}\leqslant Ch(|u|_3+h|f|_0); \tag{8}$$

且若 Ω 是凸的,则

$$|u-u_h|_{1,h}\leqslant ch^2(|u|_3+|f|_0). \tag{9}$$

上节已经指出, Rannacher 的命题 II 是不正确的, Arnold-Brezzi 举出反例证明不等式(6)不能成立,从而(7)也不能成立.

§3. 一个新的误差估计式

本文欲建立的 Morley 元的新的误差估计式如下:

命题 IV. 若真解 $u\in H^3(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)$, 则

$$|u-u_h|_{2,h}\leqslant Ch(|u|_3+h|f|_0); \tag{10}$$

且若 Ω 是凸的,则

$$|u-u_h|_{1,h}\leqslant Ch^2(|u|_3+h|f|_0). \tag{11}$$

证. 先证不等式(10). 由非协调元的 Strang 第二引理[5],有

$$|u-u_h|_{2,h}\leqslant C\left(\inf_{v_h\in V_h}|u-v_h|_{2,h}+\sup_{w_h\in V_h}\frac{|E_h(u,w_h)|}{|w_h|_{2,h}}\right), \tag{12}$$

其中

$$E_h(u,w_h)=a_h(u,w_h)-(f,w_h). \tag{13}$$

(12)式右端第一项逼近误差有标准估计式:

$$\inf_{v_h\in V_h}|u-v_h|_{2,h}\leqslant|u-\pi_hu|_{2,h}\leqslant Ch|u|_3, \tag{14}$$

其中 π_hu 为 u 在 V_h 中的插值.

(12)式右端第二项相容误差的估计如下. 应用 Green 公式,

$$a_h(u,w_h)=-\sum_K\int_K(\nabla\Delta u\cdot\nabla w_h)dxdy+E_1(u,w_h)+E_2(u,w_h), \tag{15}$$

其中

$$E_1(u,w_h)=\sum_K\int_{\partial K}\left[\Delta u-(1-\sigma)\frac{\partial^2u}{\partial s^2}\right]\frac{\partial w_h}{\partial n}ds,$$

$$E_2(u,w_h)=(1-\sigma)\sum_K\int_{\partial K}\frac{\partial^2u}{\partial n\partial s}\frac{\partial w_h}{\partial s}ds.$$

设 $D(\Omega)$ 是 Ω 上具有紧支集的无穷次可微函数集.按假设 $u\in H^3(\Omega)$,则 $\Delta^2u\in H^{-1}(\Omega)$. 由 Green 公式,

$$\forall\rho\in D(\Omega):\ (\Delta^2u,\rho)=-\int_\Omega\nabla\Delta u\cdot\nabla\rho d\sigma.$$

因为 $D(\Omega)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中是稠的,所以上式对任一 $\rho\in H_0^1(\Omega)$ 亦成立. 记 ϕ^I 是以 ϕ 在单元顶点上的函数值构成的分片线性多项式,则对任一 $w_h\in V_h$, $w_h^I\in H_0^1(\Omega)$. 取 $\rho=w_h^I$, 则有

$$(f,\ w_h^I)=(\Delta^2 u,\ w_h^I)=-\int_\Omega \nabla\Delta u\cdot\nabla w_h^I d\sigma. \tag{16}$$

由(13),(15)及(16)式得

$$E_h(u,\ w_h)=(f,\ w_h^I-w_h)+\sum_K\int_K \nabla\Delta u\cdot\nabla(w_h^I-w_h)d\sigma$$
$$+E_1(u,\ w_h)+E_2(u,\ w_h). \tag{17}$$

上式右端第一项的估计为

$$|(f,\ w_h^I-w_h)|\leqslant |f|_0|w_h^I-w_h|_0\leqslant ch^2|f|_0|w_h|_{2,h}.$$

第二项的估计为

$$\left|\sum_K\int_K \nabla\Delta u\cdot\nabla(w_h^2-w_h)d\sigma\right|\leqslant ch|u|_3|w_h|_{2,h}.$$

第三项和第四项按非协调元误差估计的标准技巧可得

$$|E_i(u,\ w_h)|\leqslant ch|u|_3|w_h|_{2,h},\quad i=1,2. \tag{18}$$

由此可知

$$|E_h(u,\ w_h)|\leqslant ch(|u|_3+h|f|_0)|w_h|_{2,h}. \tag{19}$$

将(14)与(19)代入(12),即得估计式(10).

现在证明命题 IV 的第二个不等式(11). 记 $e=u-u_h$,则 $(\pi_h e)^I\in H_0^1(\Omega)$. 作函数

$$g=-\Delta(\pi_h e)^I\in H^{-1}(\Omega),$$

并设 $\varphi\in H^3(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)$ 是下列辅助变分问题的解:

$$a(\varphi,\ v)=(g,\ v)\quad \forall v\in H_0^2(\Omega). \tag{20}$$

由微分方程解的正则性理论知,当 Ω 是凸多角形时,

$$\|\varphi\|_3\leqslant C\|g\|_{-1}.$$

按定义

$$\|g\|_{-1}=\sup_{\substack{v\in H_0^1(\Omega)\\ v\neq 0}}\frac{(g,v)}{\|v\|_1}.$$

但对任一 $v\in H_0^1(\Omega)$, 由 Green 公式有

$$(g,\ v)=-(\Delta(\pi_h e)^I,\ v)=\int_\Omega \nabla(\pi_h e)^I\cdot\nabla v d\sigma, \tag{21}$$

所以

$$|(g,\ v)|\leqslant |(\pi_h e)^I|_1|v|_1,\quad (g,\ (\pi_h e)^I)=\int_\Omega \nabla(\pi_h e)^I\cdot\nabla(\pi_h e)^I d\sigma=|(\pi_h e)^I|_1^2.$$

从而

$$\|\varphi\|_3\leqslant c\|g\|_{-1}\leqslant c|(\pi_h e)^I|_1. \tag{22}$$

另一方面,

$$|(\pi_h e)'|^2 = (g, (\pi_h e)') = (\Delta^2\varphi, (\pi_h e)') = -\int_\Omega \nabla\Delta\varphi\cdot\nabla(\pi_h e)' d\sigma$$

$$= \sum_K \int_K \nabla\Delta\varphi\cdot\nabla(\pi_h e - (\pi_h e)')d\sigma - \sum_K \int_K \nabla\Delta\varphi\cdot\nabla\pi_h e d\sigma = I_1 + I_2. \quad (23)$$

上式右端第一项 I_1 的估计如下:

$$|I_1| \leqslant \sum_K \left|\int_K \nabla\Delta\varphi\cdot\nabla(\pi_h e - (\pi_h e)')d\sigma\right|$$

$$\leqslant \sum_K |\Delta\varphi|_{1,K}|\pi_h e - (\pi_h e)'|_{1,K} \leqslant Ch|\varphi|_3|\pi_h e|_{2,h},$$

再应用插值理论及不等式(10)可知

$$|\pi_h e|_{2,h} = |\pi_h u - u_h|_{2,h} \leqslant |\pi_h u - u|_{2,h} + |u - u_h|_{2,h} \leqslant ch(|u|_3 + h|f|_0), \quad (24)$$

所以

$$|I_1| \leqslant ch^2(|u|_3 + h|f|_0)|\varphi|_3. \quad (25)$$

(23)式右端第二项 I_2 应用(15)式可写为

$$I_2 = -\sum_K \int_K \nabla\Delta\varphi\cdot\nabla\pi_h e d\sigma = a_h(\varphi, \pi_h e) - E_1(\varphi, \pi_h e) - E_2(\varphi, \pi_h e). \quad (26)$$

上式右端最后二项按(18)和(24)式得

$$|E_i(\varphi, \pi_h e)| \leqslant ch|\varphi|_3|\pi_h e|_{2,h} \leqslant ch^2(|u|_3 + h|f|_0)|\varphi|_3,\ i = 1,2. \quad (27)$$

现在考察(26)式右端第一项:

$$a_h(\varphi, \pi_h e) = a_h(\varphi, \pi_h u - u) + a_h(\varphi - \pi_h\varphi, u - u_h) + a_h(\pi_h\varphi, u - u_h)$$
$$= J_1 + J_2 + J_3.$$

由(15)式

$$J_1 = a_h(\varphi, \pi_h u - u) = -\sum_K \int_K \nabla\Delta\varphi\cdot\nabla(\pi_h u - u)d\sigma + E_1(\varphi, \pi_h u - u)$$
$$+ E_2(\varphi, \pi_h u - u),$$

而

$$\left|\sum_K \int_K \nabla\Delta\varphi\cdot\nabla(\pi_h u - u)d\sigma\right| \leqslant ch^2|\varphi|_3|u|_3,$$

$$|E_i(\varphi, \pi_h u - u)| \leqslant ch|\varphi|_3|\pi_h u - u|_{2,h} \leqslant ch^2|\varphi|_3|u|_3,$$

所以

$$|J_1| \leqslant ch^2|u|_3|\varphi|_3,$$

$$|J_2| = |a_h(\varphi - \pi_h\varphi, u - u_h)| \leqslant c|\varphi - \pi_h\varphi|_{2,h}|u - u_h|_{2,h}$$
$$\leqslant ch^2|\varphi|_3(|u|_3 + h|f|_0),$$

$$J_3 = a_h(\pi_h\varphi, u - u_h) = a_h(u, \pi_h\varphi) - a_h(u_h, \pi_h\varphi)$$
$$= a_h(u, \pi_h\varphi) - (f, \pi_h\varphi) = E_h(u, \pi_h\varphi) = E_h(u, \pi_h\varphi - \varphi)$$

以上利用了性质 $E_h(u, \varphi) = 0$。再应用不等式(19),得

$$|J_3| = |E_h(u, \pi_h\varphi - \varphi)| \leqslant ch(|u|_3 + h|f|_0)|\pi_h\varphi - \varphi|_{2,h}$$
$$\leqslant ch^2(|u|_3 + h|f|_0)|\varphi|_3,$$

所以

$$|a_h(\varphi, \pi_h e)| \leqslant ch^2(|u|_3 + h|f|_0)|\varphi|_3. \tag{28}$$

将(27)和(28)式代入(26)式，得

$$|I_2| \leqslant ch^2(|u|_3 + h|f|_0)|\varphi|_3. \tag{29}$$

再将(25)和(29)式代入(23)式并注意到(22)式，有

$$|(\pi_h e)'|_1 \leqslant ch^2(|u|_3 + h|f|_0). \tag{30}$$

由上式及(24)式可知

$$|\pi_h e|_{1,h} \leqslant |\pi_h e - (\pi_h e)'|_{1,h} + |(\pi_h e)'|_1 \leqslant ch|\pi_h e|_{2,h} + ch^2(|u|_3 + h|f|_0) \leqslant ch^2(|u|_3 + h|f|_0).$$

再应用三角形不等式有

$$|e|_{1,h} \leqslant |e - \pi_h e|_{1,h} + |\pi_h e|_{1,h} \leqslant ch^2|u|_3 + ch^2(|u|_3 + h|f|_0) \leqslant ch^2(|u|_3 + h|f|_0),$$

不等式(11)由是得证.

最后我们指出以下两点：

1. 不等式(10)与命题 III 中的不等式(8)是相同的，但推导的方法不同. (10)是直接从 Morley 元作为非协调元出发用相当简洁的方法证明的，而(8)则利用修改的 Morley 元和混合元的等价性，从混合元的误差估计再转到原来的 Morley 元上而得到的. 不等式(11)比命题 III 的相应不等式(9)有所改进，而且也是直接证明的，而(9)则是先作修改的 Morley 元的 H^1 模误差估计再转到 Morley 元上而得出的.

2. 在命题 I 的估计式(4)中，若令 $|u|_4 \leqslant c|f|_0$，则由(4)即得(10). 但这种关于解的正则性的不等式对一般的多角形区域，甚至对凸多角形域，并不成立，所以(10)不能由(4)推出.

参 考 文 献

[1] L. S. D. Morley, The triangular equilibrium element in the solution of plate bending problems, *Aero. Quart.*, 19 (1968), 149—169.

[2] P. Lascaux, P. Lesaint, Some nonconforming finite elements for the plate bending problem, *RAIRO Anal. Numér.*, 9 (1975), 9—53.

[3] R. Rannacher, On nonconforming and mixed finite elements for plate bending problems. The linear case, *RAIRO Anal. Numér*, 13 (1979), 369—387.

[4] D. N. Arnold, F. Brezzi, Mixed and nonconforming finite element methods: Implementation, postprocessing and error estimates, *M^2AN*, 19 (1985), 7—32.

[5] P. G. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, Amsterdam, 1978.