

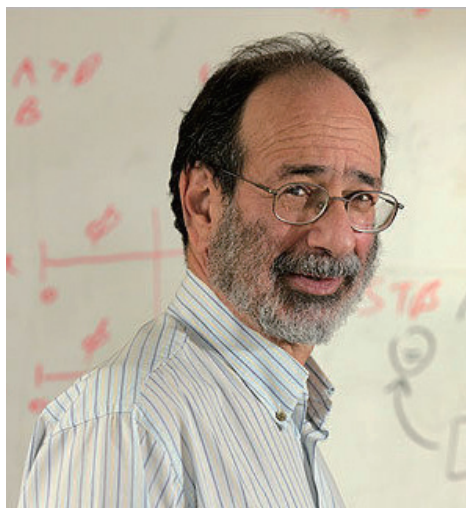
# 稳操胜券

——2012年诺贝尔经济学奖之稳定婚姻

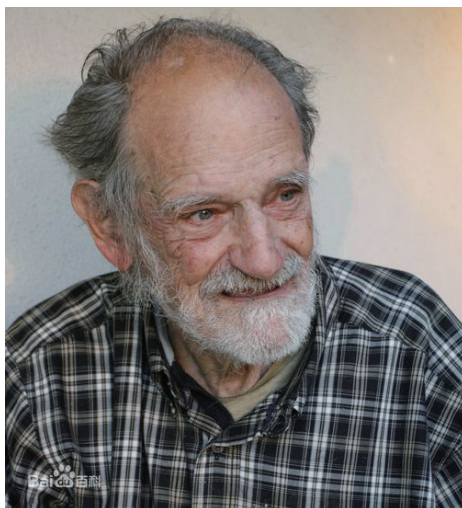
张跃辉 李吉有 朱佳俊



2012年诺贝尔经济学奖的两个得主分别为美国哈佛大学商学院教授罗斯（Alvin E. Roth）和美国加州大学洛杉矶分校教授沙普利（Lloyd S. Shapley）。

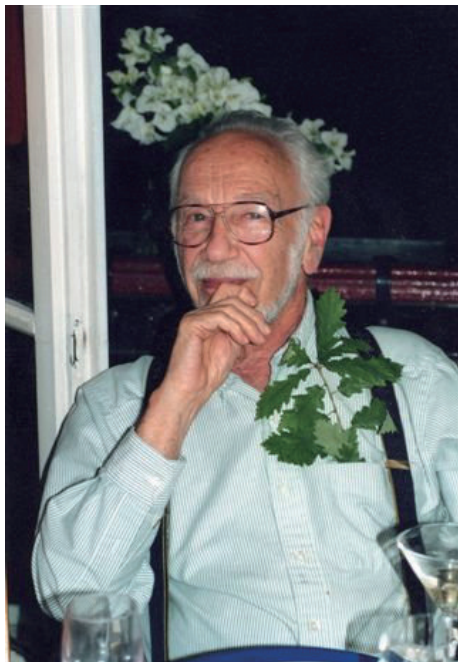


罗斯（1951-）



沙普利（1923-2016）

两位经济学奖得主的主要贡献是稳定匹配理论（stable matching theory）和市场设计。稳定匹配理论广泛地应用于实际生活。例如，如何设计高考填报志愿方法，如何将捐献的器官分配到需要的病人，如何将实习医生分配到各个医院等。沙普利的主要贡献是提供了一个理论上的最优方案，称之为“盖尔-沙普利方法”（Gale-Shapley method）。以高考填报志愿为例，该方法的基本思想是，让分数最高的人先报，每个大学挑选它最中意的学生，踢掉其它候选人；然后让分数次高的人填报，大学依然挑选最中意的人；最后直到所有学生都被录取为止。这一机制可以确保公平和效率。我国多数省份高考录取采用的平行



盖尔 (1921 - 2008)

志愿即是该理论的一种应用。

与大多数经济学家和数学家研究经济学中的主流问题“非合作博弈论”不同的是，沙普利研究的是合作博弈论。沙普利获奖的最大原因是他和盖尔 (David Gale) 于 1962 年通过研究所谓“稳定婚姻”所创的“盖尔-沙普利方法”，其核心是市场匹配的合理原则应该是“情投意合”而非“价高者得”。作者对此佩服得五体投地，因为只有这个“情投意合”而非“价高者得”的优美而英明的理论可以解释为什么有“黄金剩女”！

在解释稳定婚姻的数学理论之前，我们先来看看博弈论中广为人知的例子，即所谓“囚徒悖论”(prisoner's dilemma，又称“囚徒困境”)。

### 例 1. 囚徒悖论。

假设两个小偷 A 和 B 联合作案被抓。警方将 A 和 B 分别审讯，A 与 B 对对方的供词一无所知。警方对每一个嫌疑人的政策是：“坦白从宽，抗拒从严。”即若两个嫌疑人都坦白认罪并交出赃物，于是证据确凿，两人都被判有罪并领刑 5 年；如果只有一个嫌疑人坦白，而另一个抵赖，则抵赖者再加刑 3 年，而坦白者有功被立即免罪释放；如果两个嫌疑人都抵赖，则警方因证据不足只能将两人各拘留 10 天。问两个嫌疑人的策略如何？

我们再来考察纳什 1950 年设计的著名例子——智猪博弈 (boxed pig game)。

### 例 2. 智猪博弈。

假设猪圈里有一头大猪和一头小猪。猪圈很长，一头有一踏板，另一头是饲料的出口和食槽。猪每次踏板，会有 10 份猪食进槽，但踏板需要付出的“劳动”相当于 2 份猪食。另外如果一只猪踏板，另一只猪就会先吃到食物。具体规则为：如果同时到食槽，大猪吃 7 份，小猪吃 3 份；大猪先到食槽，大猪吃 9 份，小猪吃 1 份；小猪先到食槽，大猪吃 6 份，小猪吃 4 份。问两头猪的策略如何？

上述两个问题形式上略有差别但本质都是相同的，即最佳策略来自于“合作”。在“囚徒悖论”一例中，两个嫌疑人共同抗拒是群体的最佳策略，因为这样每个嫌疑人将只得到拘留 10 天的较小惩罚；然而如果某个嫌疑人采用群体的最佳策略而抗拒，同时另一个嫌疑人却坦白了，则抗拒的嫌疑人将得到最严厉即 8 年的刑罚，因此“群体的最佳策略”却是个体的“最差策略”，于是“悖论”形成。而在“智猪博弈”一例中，小猪不可能去踏板，否则它将倒欠 1 份猪食！而如果大猪去踏板，则它最终将和小猪得到同样 4 份猪食！因此，最佳

的策略是大猪小猪“合作”即共同踏板并各付出1份猪食，最终大猪得到6份猪食，小猪得到2份猪食。于是“合作”产生“智猪”。

现在我们可以考察稳定婚姻问题（stable marriage problem, 简称 SMP）了。关于婚姻，2500年前苏格拉底曾有精彩绝伦的论述：

By all means, marry. If you get a good wife, you will become happy;  
and if you get a bad one, you will become a philosopher.

一定要结婚。如果你娶到好妻子，你会很快乐；如果你娶到不好的妻子，你就会成为哲学家。

50年前，盖尔与沙普利引入“稳定婚姻”。该问题如下：

设有 $N$ 个想结婚的男子和 $N$ 个想结婚的女子，他们每个人都对每个异性按照自己钟情的程度给予排名（排名越靠前表示钟情的程度越深）。稳定婚姻问题的研究目标是找到某种匹配，使得每个人的婚姻都是稳定的。

什么样的婚姻才是稳定婚姻呢？首先，稳定婚姻应该是每个人都有自己的配偶（盖尔与沙普利也研究了男女人数不相同的情形，此时应该使数目较小的性别的每个人都有配偶）。其次，如果现有的婚姻匹配中，某男子A更钟情于某女子甲而不是现在的妻子、同时该女子甲也更钟情于该男子A而不是现在的丈夫，则男子A与女子甲极有可能“私奔”，这样的婚姻自然是不稳定的，称为不稳定婚姻匹配（unstable marriage matching）。因此，稳定的婚姻匹配应该杜绝这样的男子和女子同时存在，即稳定婚姻匹配应该是没有男子更钟情于非妻子的某女子的同时该女子也更钟情于该男子。换句话说，对于每一个人，他心目中比他当前伴侣更好的异性，都不会认为他也是更好的选择。请注意，稳定婚姻未必是使每个人都最为满意的婚姻。

具有稳定婚姻的社会当然是美好而令人向往的。苏格拉底眼中的婚姻都是稳定婚姻。但问题是稳定婚姻是否必然存在呢？答案在盖尔与沙普利下述著名的6页论文中：

D. Gale and L. S. Shapley: "College Admissions and the Stability of Marriage", American Mathematical Monthly 69, 9-14, 1962.

盖尔 - 沙普利定理——稳定婚姻必定存在。

实际上，盖尔与沙普利在该文中对任意匹配系统（即男女数量不必相同）给出了现在被称为“盖尔 - 沙普利方法”的一种算法（见下文），利用此算法可以找出至少一种稳定的婚姻匹配。在最简单的非平凡情形中，有2男A、B与2女甲、乙。无论四人对异性的钟情程度如何，都容易找出最好的婚姻匹配——当然是稳定婚姻。比如，若A与B均钟情于甲，而甲与乙均钟情于A，则显然A与甲的匹配以及B与乙的匹配构成一个稳定婚姻，读者不难看出这个稳定婚姻还是唯一的。因为尽管B并非乙心中的白马王子，乙也不是B的梦中情人，但他们两人中的任何一个都不可能撬动A与甲的婚姻——人家可